



# Balanceo en árboles con pesos y aplicaciones a un problema de orientación en grafos

**Bastian Flores San Martín**

Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Concepción

Concepción, Chile

## Resumen

Sea  $T = (V, E)$  un árbol y  $w : V \rightarrow \mathbb{N}$  una función que asigna pesos no negativos a cada vértice de  $T$ . En una extensión de la notación, para todo subconjunto de vértices  $U \subseteq V$ , definimos  $w(U) = \sum_{u \in U} w(u)$ . Al árbol  $T$  junto a la función  $w$  lo llamamos *árbol con pesos* y lo denotamos por la tripleta  $T = (V, E, w)$ .

Sean  $T_1, T_2, \dots, T_{k_v}$  las componentes conexas de  $T - v$ , el bosque que se obtiene al borrar el vértice  $v \in V$ . Un *centroide* en un árbol con pesos  $T = (V, E, w)$  es un vértice  $c$  tal que  $w(T_i) \leq w(T)/2$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k_c\}$ . En [1] los autores muestran que todo árbol con pesos tiene al menos uno y a lo más dos centroides, que en caso de ser dos, estos son vecinos, y además dan un algoritmo polinomial que los encuentra. Por otro lado, sea  $P \subseteq \{1, 2, \dots, k_v\}$  un subconjunto de índices de componentes conexas de  $T - v$ . Definimos los siguientes valores:  $f(v, P) = \left| \sum_{i \in P} w(T_i) - \sum_{j \notin P} w(T_j) \right|$ , y  $f_{opt}(v) = \min_P f(v, P)$ . De esta forma, un vértice que *balancea*  $T$  consiste en un vértice que entrega el menor valor de  $f_{opt}$ .

En este trabajo estudiamos la relación entre los centroides y los vértices que balancean en árboles con pesos, y su aplicación a un problema de orientación en grafos. Mostramos que en árboles donde  $w(u) = 1$  para todo vértice  $u \in V$ , los vértices que balancean coinciden con los centroides. Mientras que en el caso general, un centroide o uno de sus vecinos es quien balancea el árbol. Demostramos además que determinar el valor de  $f_{opt}(v)$  es NP-Hard.

Finalmente, aplicamos estos resultados al *problema de orientación en grafos*, que dado un grafo busca una orientación de sus aristas que maximice la cantidad de pares de vértices conectados por caminos dirigidos. Al transformar el grafo a un árbol con pesos y orientar sus aristas según el vértice que balancea, se obtiene una orientación para la cual demostramos optimalidad.

Trabajo realizado en conjunto con:

**Danilo Castañeda Baquedano, Bastian Flores San Martín, Anahí Gajardo Schulz, Benjamín Mendieta Bustos, Luciano Reyes Reiher, Christopher Thraves Caro.**

*Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción.*

## Referencias

- [1] H. BIELAK Y M. PANCZYK, *A self-stabilizing algorithm for finding weighted centroid in trees*, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, sectio AI-Informatica, 12 (2012), pp. 27–37.