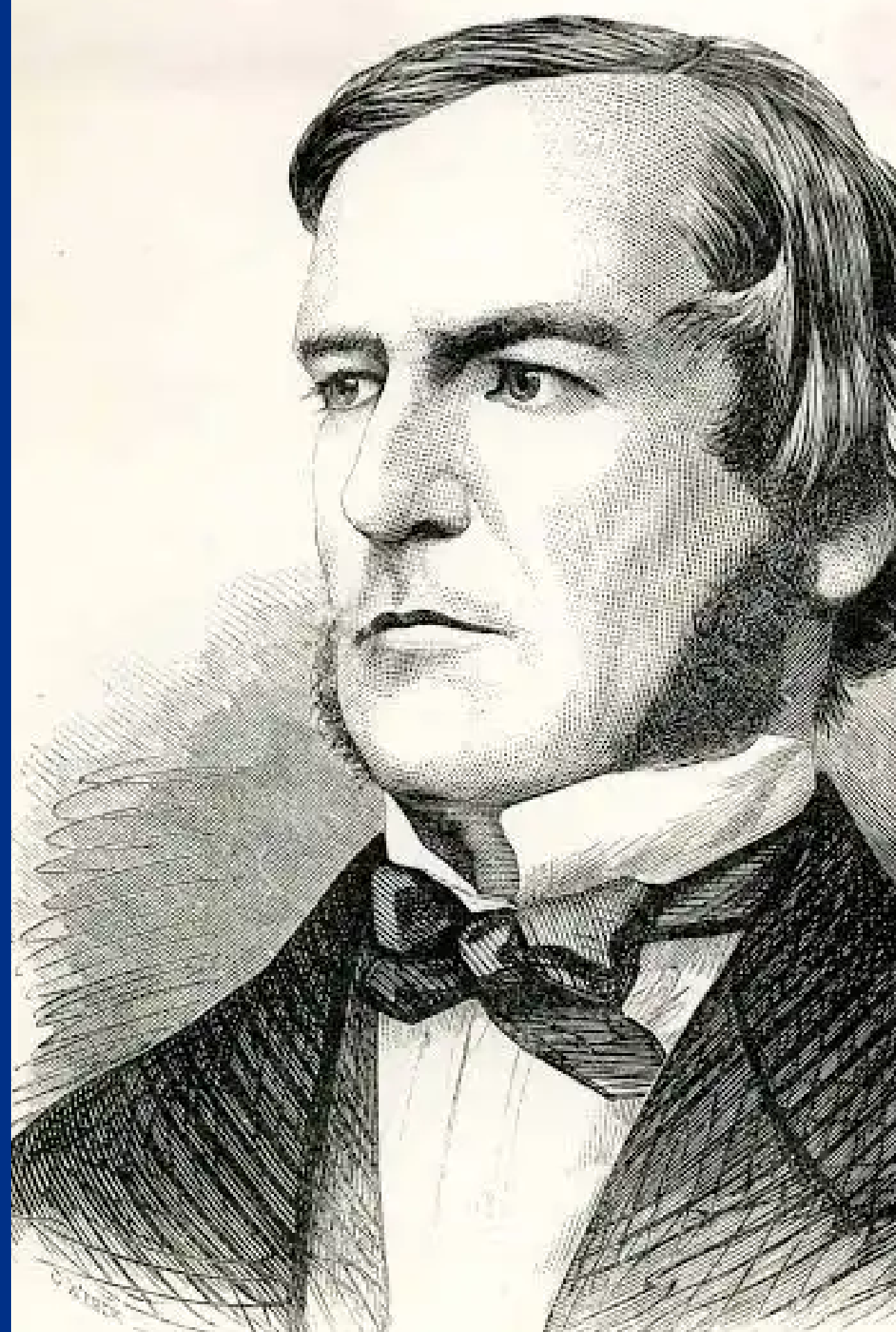


Lógica proposicional



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Plan

- **Plan:**
 - Cosas administrativas
 - Introducción
 - Propositiones
 - Operadores lógicos
 - Sintaxis y semántica
 - Propiedades

Cosas administrativas

Administratrivia

- Secciones coordinadas
- 3 controles: S6 - S10 - S14
 - Una hoja de apuntes, en horario auxiliar (en principio)
 - Reemplazado por examen en casos justificados
- 3 ejercicios: S4 - S8 - S12
 - Sin apuntes, últimos 30 minutos de la catedra del martes (en principio)
 - Reemplazado por el control en casos justificados
- 1 examen: fecha a definir.
- Medio de comunicación: U-Cursos.
- `amerino.cl/discretas`

Cálculo de notas

- **NE**: Promedio de los ejercicios
- **NCon**: Promedio de los controles
- Si **NCon** ≥ 5.5 , está exento del examen.
- **NCat**: $40\% \cdot \text{Examen} + 60\% \cdot \text{NCon}$.
- **Para aprobar**: Ambos **NE** ≥ 4.0 y **NCat** ≥ 4.0 .

$$\text{NFinal} = 80\% \cdot \text{NCat} + 20\% \cdot \text{NE}.$$

Metodología

- Secciones coordinadas, metodologías distintas
- Cada clase: lecturas, slides, handouts.
- Estructura:
 - 12:00 - Catedra
 - 13:00 - Resolución de problemas y dudas
 - 13:25 - Discusión
- Handout - 3 problemas
 - P1 - Tipo
 - P2 - Asimilación o exploración
 - P3 - Más compleja

Introducción

Temas del curso

- Fundamentos matemáticos para cs. de la computación
- Lógica
- Técnicas de demostración
- Relaciones
- Combinatoria
- Recurrencias y funciones generatrices
- Teoría de grafos

Estudio discretas

- Base fundamental
- Formalización.
- Lenguaje común.
- Razonamiento más allá de ejemplos
- Abstracción y modelamiento
- Pensamiento algoritmico
- Entender los límites
- Elegante y entretenido

Lógica proposicional

Lógica

- ¿Qué estudia la lógica?

- Razonamiento válido

1. Una intensa ola de frío está afectando a gran parte de USA

2. Por tanto, el calentamiento global no está ocurriendo

1. Todo déficit comercial es una pérdida monetaria.

2. USA tiene un déficit comercial.

3. Por lo tanto, USA está sufriendo una pérdida monetaria

- Sintáxis, semántica e inferencia

- Varios tipos

- Proposicional, de predicados, de orden n , difusa, modal, etc...

Lógica proposicional

- ¿Qué es una proposición?

Def.

Una *proposición* es un enunciado declarativo que sin ambigüedad es verdadero o falso, pero no ambos a la vez.

- Ej:

- Santiago es la capital de Chile.
- ¿Cuál es la capital de Chile?
- $2 + 2 = 5$.
- Silencio, por favor.
- Hoy llueve en Concepción.
- $x + 2 = 4$.
- Esta oración es falsa.

Operadores lógicos

- Podemos **combinar** proposiciones
 - Usando $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Ej:
 - Santiago es la capital de Chile.
 - $2 + 2 = 5$.
 - Hoy llueve en Concepción.

Sintaxis y semántica

Sintaxis proposicional

- **Sintaxis:** fórmulas “bien formadas” a partir de proposiciones más básicas. (que compila)
- Definición *recursiva*

Def.

Las *fórmulas bien formadas* (FBF) se definen como sigue:

- Si p es una variable proposicional, entonces p es una FBF.
- Si α y β son FBF, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ y $(\alpha \rightarrow \beta)$ son FBF.

- **Ej:** p, q, r variables proposicionales.
 - $((((p \vee q) \rightarrow q) \wedge (\neg(q \vee r))))$
 - $((((p \vee \vee q) \wedge \vee \neg q q r$
 - $(p \rightarrow (q \wedge r))$
 - $(p \vee q) \rightarrow r$

Simplificación

- **Simplificación:**

- precedencia: $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow$.

- **Ej:**

- $((p \vee q) \wedge r)$
 - $((p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s))$
 - $((p \wedge q) \rightarrow r)$
 - $((p \vee q) \rightarrow (r \vee s))$

Semántica proposicional

- **Semántica:** significado de las FBF a partir del significado de proposiciones más básicas.
- Significado de proposiciones básicas $\rightarrow$ valuación.

Def.

Sean $p_1, \dots, p_n$ variables proposicionales.

Una *valuación* de $\{p_1, \dots, p_n\}$ es una función $v: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ que asocia un valor de verdad a cada variable proposicional.

- Ej:
 - $v_1(p) = 1, \quad v_1(q) = 1, \quad v_1(r) = 0.$
 - $v_2(p) = 1, \quad v_2(q) = 0, \quad v_2(r) = 1.$

Semántica proposicional

- **Semántica:** significado de las FBF a partir del significado de proposiciones más básicas.
- Definición *recursiva*

Def.

Sean $p_1, \dots, p_n$ variables proposicionales y $v: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ una valuación. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de FBF con variables en $p_1, \dots, p_n$.

La *valuación (respecto a v)* $\hat{v}: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ asigna un valor de verdad a cada fórmula $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

- $\hat{v}(p) = v(p)$ para $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$,
- $\hat{v}(\neg\alpha) = 1 - \hat{v}(\alpha)$,
- $\hat{v}(\alpha \wedge \beta) = \min\{\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}$.
- $\hat{v}(\alpha \vee \beta) = \max\{\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}$.
- $\hat{v}(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{1 - \hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}$.

Semántica proposicional

Def.

Sean $p_1, \dots, p_n$ variables proposicionales y $v: \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ una valuación. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de FBF con variables en $p_1, \dots, p_n$.

La *valuación (respecto a v)* $\hat{v}: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ asigna un valor de verdad a cada fórmula $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

- $\hat{v}(p) = v(p)$ para $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$,
- $\hat{v}(\neg\alpha) = 1 - \hat{v}(\alpha)$,
- $\hat{v}(\alpha \wedge \beta) = \min\{\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}$.
- $\hat{v}(\alpha \vee \beta) = \max\{\hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}$.
- $\hat{v}(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{1 - \hat{v}(\alpha), \hat{v}(\beta)\}$.

• Ej:

- $\hat{v}_1((p \wedge q) \rightarrow r)$ bajo $v_1(p) = 1, \quad v_1(q) = 1, \quad v_1(r) = 0$.
- $\hat{v}_2((p \wedge q) \rightarrow r)$ bajo $v_2(p) = 1, \quad v_2(q) = 0, \quad v_2(r) = 1$.

¿Tablas de verdad?

- La semántica anterior es la misma que la dada por las tablas de verdad

α	$\neg\alpha$	α	β	$\alpha \vee \beta$	α	β	$\alpha \wedge \beta$	α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
		1	0	1	1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1	1	1	1

- Podemos calcular tablas de verdad de otras FBF

- Ej:**

◦ $\hat{v}((p \wedge q) \rightarrow r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Tautología y contradicción

- Ej:

- $p \vee \neg p$

- $p \wedge \neg p$

- ¿En términos de valuaciones?

Def.

Sea α una FBF.

Diremos que α es una *tautología* si para toda valuación v de las variables de α , tenemos que $\hat{v}(\alpha) = 1$.

Diremos que α es una *contradicción* si para toda valuación v de las variables de α , tenemos que $\hat{v}(\alpha) = 0$.

Inferencia

- ¿Argumento válido?

1. La luna es un planeta o 2 es impar.

2. La luna no es un planeta.

3. Por lo tanto, 2 es impar.

1. Si santiago está en Chile, entonces está en Sudamérica.

2. Santiago está en Sudamérica.

3. Por lo tanto, Santiago está en Chile.

- Válido: si la conclusión se sigue de las premisas.

Def.

Sean $P_1, \dots, P_n$ un conjunto de premisas y C una conclusión.

Un argumento es *válido* si toda valuación v que hace verdaderas a las premisas, también hace verdadera a la conclusión.

- **Alt:** $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow C$ es tautología.

Dudas/Preguntas

Problema del día

2. Considere un sistema de despliegue de software con las siguientes proposiciones:

- S : el despliegue satisface las condiciones de seguridad;
- R : la infraestructura requerida está disponible;
- E : un administrador emite una autorización de emergencia;
- Q : se alcanza el quórum de aprobaciones automáticas;
- D : el despliegue se ejecuta.

Las reglas del sistema son:

R1. Las condiciones de seguridad e infraestructura se cumplen si y solo si existe autorización de emergencia o se alcanza el quórum.

R2. Si se alcanza el quórum, el despliegue se ejecuta.

R3. Si existe autorización de emergencia, el despliegue se ejecuta.

- (a) Escriba las tres reglas como fórmulas proposicionales.
- (b) ¿Son consistentes las reglas con un despliegue ejecutado que no satisface las condiciones de seguridad? Justifique.
- (c) Demuestre que las reglas implican

$$S \wedge R \rightarrow D.$$

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Cosas administrativas
- Introducción
- Propositiones
- Operadores lógicos
- Sintaxis y semántica
- Propiedades

- **Prox. clase:**

- Deducción natural