

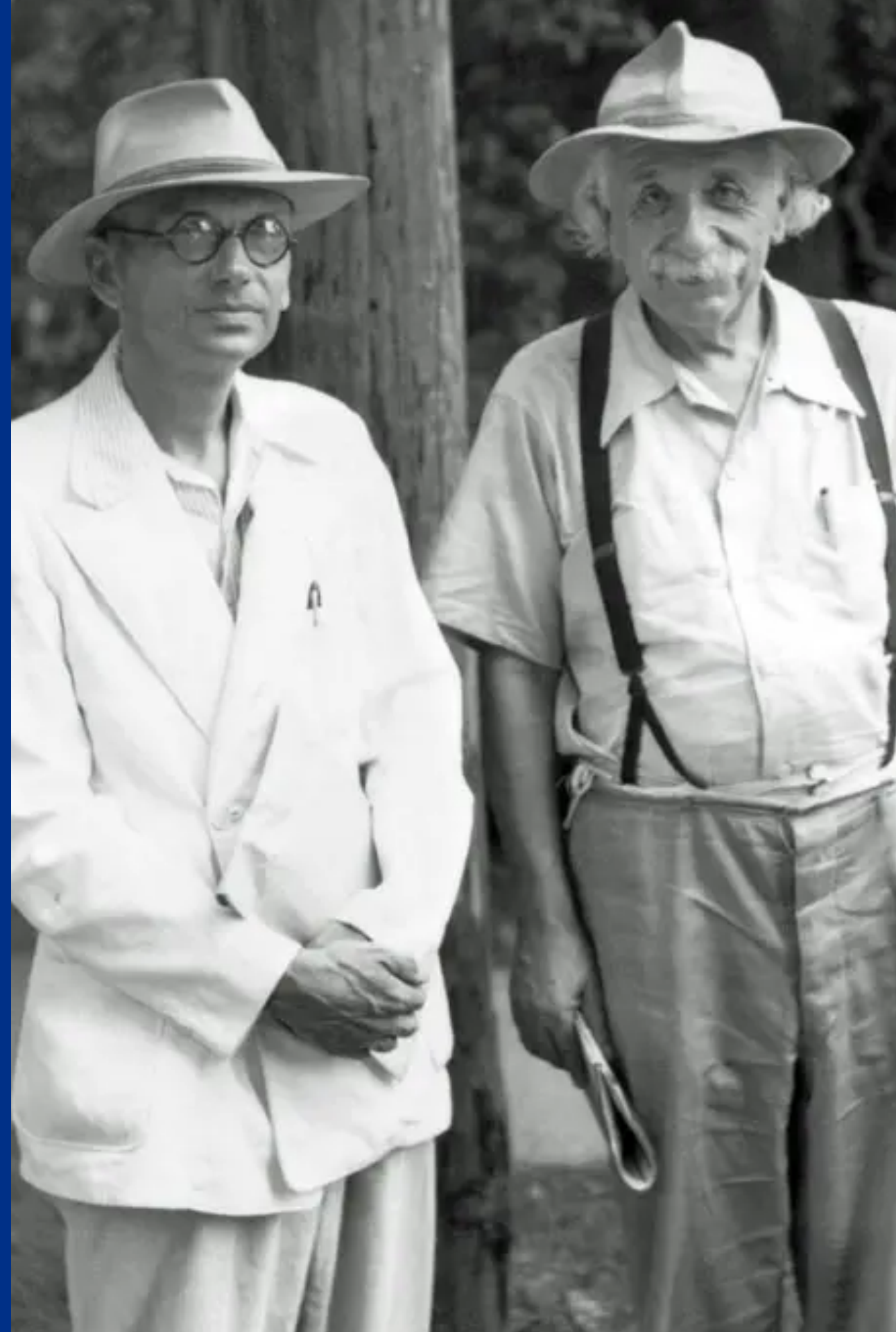
Tema 1-5

Deducción natural en lógica de predicados



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- **Recuerdo:**
 - Sintaxis de lógica de primer orden

- **Recuerdo:**

- Sintaxis de lógica de primer orden
- Semántica de lógica de primer orden

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Sintaxis de lógica de primer orden
- Semántica de lógica de primer orden

- **Plan:**

- **Recuerdo:**

- Sintaxis de lógica de primer orden
- Semántica de lógica de primer orden

- **Plan:**

- Deducción natural en lógica de predicados

- **Recuerdo:**

- Sintaxis de lógica de primer orden
- Semántica de lógica de primer orden

- **Plan:**

- Deducción natural en lógica de predicados
- Wrap-up unidad de lógica

Inferencia en lógica de predicados

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim.

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

$\forall$ -intro.

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

$\forall$ -intro. Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

$\forall$ -intro. Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

- Gráficamente

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}$$

a	(supuesto temporal)
$\vdots$	
$\phi(a)$	(conclusión temporal)
$\forall x \phi(x)$	

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

$\forall$ -intro. Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

- Gráficamente

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}$$

a	(supuesto temporal)
$\vdots$	
$\phi(a)$	(conclusión temporal)
$\forall x \phi(x)$	

- Ej:

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

$\forall$ -intro. Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

- Gráficamente

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)} \quad \begin{array}{c} a \\ \vdots \\ \phi(a) \end{array} \begin{array}{l} \text{(supuesto temporal)} \\ \text{(conclusión temporal)} \end{array}$$
$$\frac{\phi(a)}{\forall x \phi(x)}$$

- **Ej:**

- $\{\forall x (\text{Persona}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x)), \text{Persona}(s)\} \vdash \text{Mortal}(s)$

Inferencia: cuantificador universal

- **Extendamos** la deducción natural

Inf.

$\forall$ -elim. Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$, siempre que el reemplazo de x por t sea válido.

$\forall$ -intro. Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

- Gráficamente

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)} \quad \begin{array}{c} a \\ \vdots \\ \phi(a) \end{array} \begin{array}{l} \text{(supuesto temporal)} \\ \text{(conclusión temporal)} \end{array}$$
$$\frac{\phi(a)}{\forall x \phi(x)}$$

- **Ej:**

- $\{\forall x (\text{Persona}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x)), \text{Persona}(s)\} \vdash \text{Mortal}(s)$
- $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x (Q(x) \rightarrow R(x))\} \vdash \forall x (P(x) \rightarrow R(x)).$

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

$\exists$ -intro.

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

$\exists$ -intro. Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

$\exists$ -intro. Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.

$\exists$ -elim.

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

- $\exists$ -intro. Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.
- $\exists$ -elim. Supongamos que hemos demostrado $\exists x \phi(x)$. Podemos abrir una subdemostración suponiendo $\phi(a)$ para un parámetro nuevo a . Si obtenemos una conclusión ψ que no menciona a a , podemos descargar el supuesto y concluir ψ .

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

- $\exists$ -intro. Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.
- $\exists$ -elim. Supongamos que hemos demostrado $\exists x \phi(x)$. Podemos abrir una subdemostración suponiendo $\phi(a)$ para un parámetro nuevo a . Si obtenemos una conclusión ψ que no menciona a a , podemos descargar el supuesto y concluir ψ .

- Gráficamente

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}$$

$\exists x \phi(x)$

$$\frac{\begin{array}{c} \phi(a) \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}$$

(supuesto temporal)

(conclusión temporal)

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

- $\exists$ -intro. Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.
- $\exists$ -elim. Supongamos que hemos demostrado $\exists x \phi(x)$. Podemos abrir una subdemostración suponiendo $\phi(a)$ para un parámetro nuevo a . Si obtenemos una conclusión ψ que no menciona a a , podemos descargar el supuesto y concluir ψ .

- Gráficamente

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}$$

$\exists x \phi(x)$

$$\begin{array}{c} \phi(a) \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

$$\psi$$

(supuesto temporal)

(conclusión temporal)

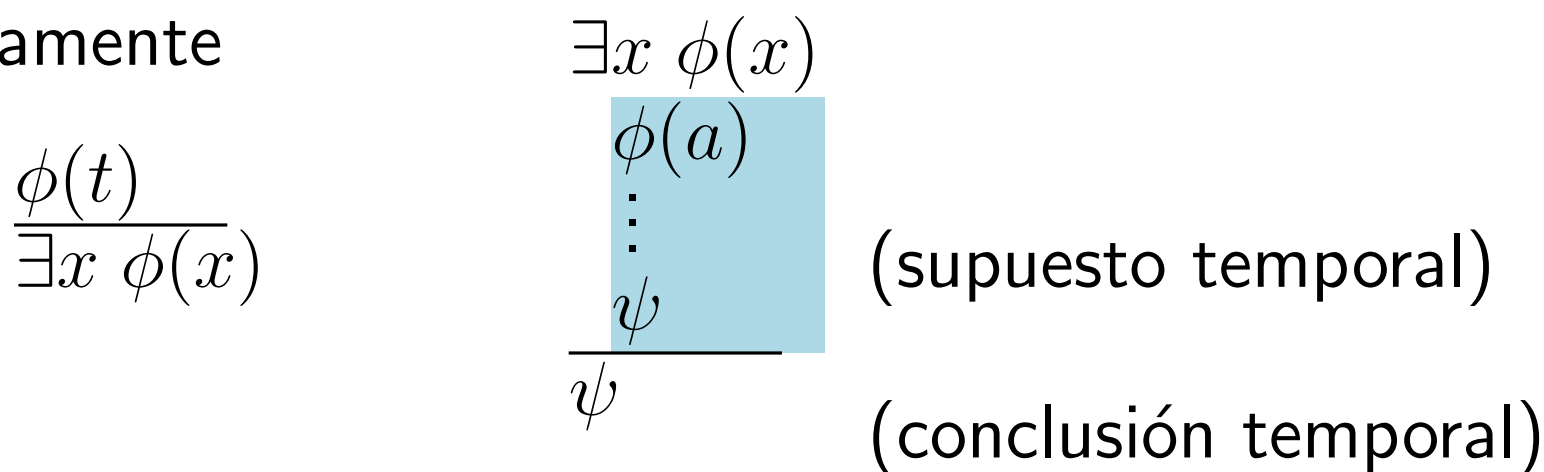
- Ej:

Inferencia: cuantificador existencial

Inf.

- $\exists$ -intro. Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.
- $\exists$ -elim. Supongamos que hemos demostrado $\exists x \phi(x)$. Podemos abrir una subdemostración suponiendo $\phi(a)$ para un parámetro nuevo a . Si obtenemos una conclusión ψ que no menciona a a , podemos descargar el supuesto y concluir ψ .

- Gráficamente



- Ej:

$$\circ \{ \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x (P(x) \wedge R(x)) \} \vdash \exists x Q(x).$$

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans. Si hemos demostrado $t = u$ y $u = v$, podemos concluir $t = v$.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans. Si hemos demostrado $t = u$ y $u = v$, podemos concluir $t = v$.

Reem.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans. Si hemos demostrado $t = u$ y $u = v$, podemos concluir $t = v$.

Reem. Si hemos demostrado $t = u$ y $\phi(t)$, podemos concluir $\phi(u)$.

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans. Si hemos demostrado $t = u$ y $u = v$, podemos concluir $t = v$.

Reem. Si hemos demostrado $t = u$ y $\phi(t)$, podemos concluir $\phi(u)$.

- Gráficamente

$$\frac{}{t = t}$$

$$\frac{t = u}{u = t}$$

$$\frac{t = u}{u = v}$$

$$\frac{t = u}{\phi(t)}$$

$$\phi(u)$$

Inferencia: igualdad

- Reglas de igualdad: reflexividad, simetría, transitividad y reemplazo.

Inf.

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans. Si hemos demostrado $t = u$ y $u = v$, podemos concluir $t = v$.

Reem. Si hemos demostrado $t = u$ y $\phi(t)$, podemos concluir $\phi(u)$.

- Gráficamente

$$\begin{array}{cccc} \frac{}{t = t} & \frac{t = u}{u = t} & \frac{t = u}{u = v} & \frac{t = u}{\phi(t)} \\ & & \frac{}{t = v} & \frac{}{\phi(u)} \end{array}$$

- Ej:** $\{\forall x (C(x) \rightarrow F(x)), C(c), c = d\} \vdash F(d)$.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

- ¿Puede la deducción natural demostrar todas las consecuencias lógicas?

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

- ¿Puede la deducción natural demostrar todas las consecuencias lógicas?

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

- ¿Puede la deducción natural demostrar todas las consecuencias lógicas?

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

- ¿Puede la deducción natural demostrar todas las consecuencias lógicas?

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

- Demostrado por Gödel en 1929

Dudas/Preguntas

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional
- Satisfacibilidad $\rightarrow$ modelar

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional
- Satisfacibilidad $\rightarrow$ modelar
- Sintaxis lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional
- Satisfacibilidad $\rightarrow$ modelar
- Sintaxis lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Vars, const, funciones, predicados, $=$, conectivos y cuantificadores.

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional
- Satisfacibilidad $\rightarrow$ modelar
- Sintaxis lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Vars, const, funciones, predicados, $=$, conectivos y cuantificadores.
- Semántica lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional
- Satisfacibilidad $\rightarrow$ modelar
- Sintaxis lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Vars, const, funciones, predicados, $=$, conectivos y cuantificadores.
- Semántica lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Dada interpretación de los elementos $\rightarrow$ significado de la FBF

Unidad de lógica

- Sintaxis lógica proposicional $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Recursiva: variables + conectivos
- Semántica lógica proposicional $\rightarrow$ qué significan las FBF
 - Dada valuación de las variables $\rightarrow$ valuación de las FBF
- Equivalencia semántica
- Expresividad $\rightarrow$ las FBF pueden expresar toda función booleana
 - Completitud funcional
- Satisfacibilidad $\rightarrow$ modelar
- Sintaxis lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Vars, const, funciones, predicados, $=$, conectivos y cuantificadores.
- Semántica lógica de predicados $\rightarrow$ quiénes son las FBF
 - Dada interpretación de los elementos $\rightarrow$ significado de la FBF
- Deducción natural: correcto y completo para lógica prop.

Wrap-Up

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Próx. clase:**
 - **Nueva unidad:** Demostraciones (en lenguaje natural)

Wrap-Up

- **Próx. clase:**
 - **Nueva unidad:** Demostraciones (en lenguaje natural)
 - Repaso técnicas de demostración