

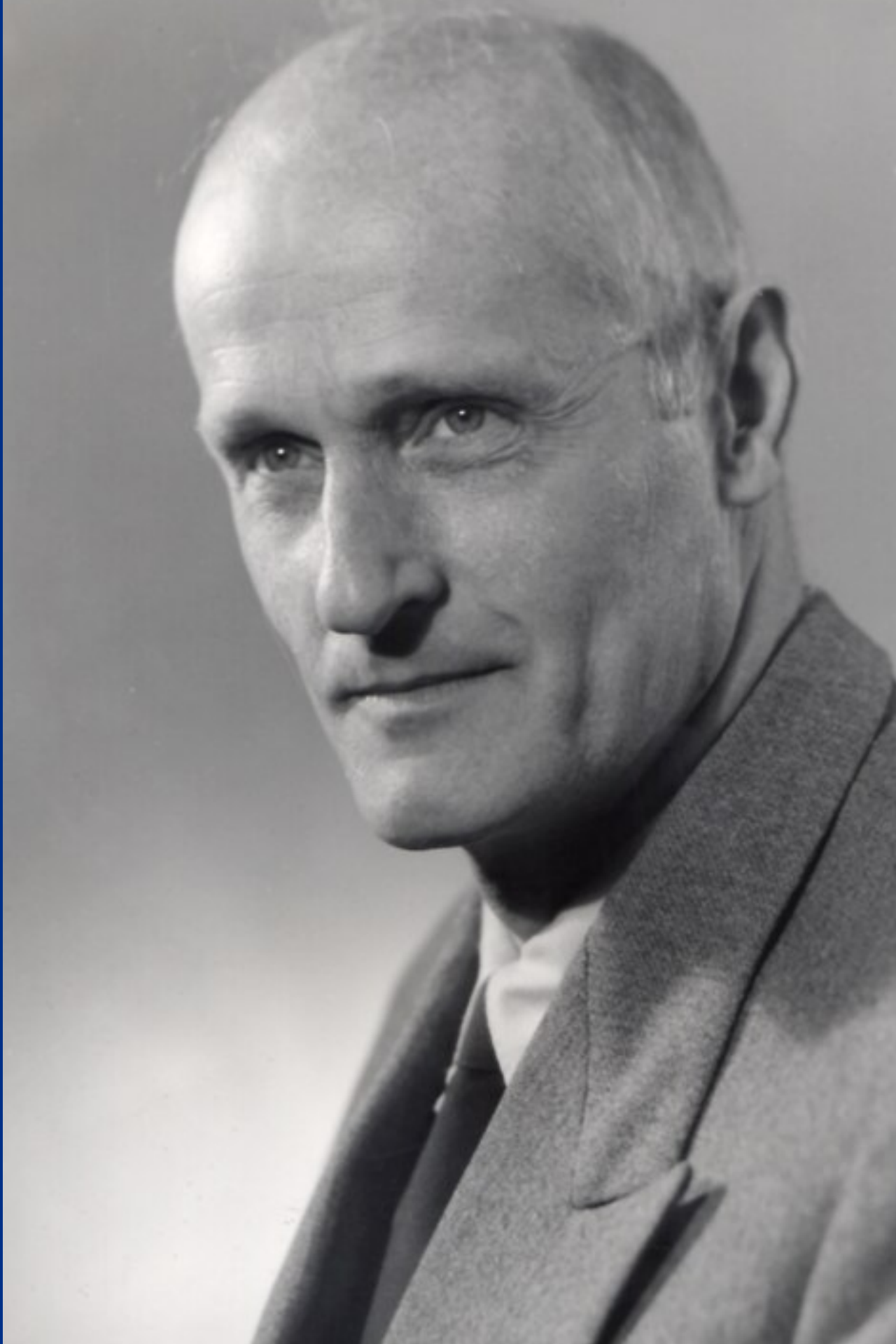
Tema 2-6

Operaciones en Relaciones



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

■ Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Relaciones

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Relaciones
 - Cómo representarlas

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Relaciones
 - Cómo representarlas
 - Relaciones de orden

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Relaciones
 - Cómo representarlas
 - Relaciones de orden
 - Relaciones de equivalencia

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Relaciones
 - Cómo representarlas
 - Relaciones de orden
 - Relaciones de equivalencia
 - Funciones

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Relaciones
- Cómo representarlas
- Relaciones de orden
- Relaciones de equivalencia
- Funciones

- **Plan:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Relaciones
- Cómo representarlas
- Relaciones de orden
- Relaciones de equivalencia
- Funciones

- **Plan:**

- Operaciones elementales

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Relaciones
- Cómo representarlas
- Relaciones de orden
- Relaciones de equivalencia
- Funciones

- **Plan:**

- Operaciones elementales
- Inversas, composición y potencias

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Relaciones
- Cómo representarlas
- Relaciones de orden
- Relaciones de equivalencia
- Funciones

- **Plan:**

- Operaciones elementales
- Inversas, composición y potencias
- Clausuras

Relaciones

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .
- la *intersección* $R \cap S$ como los pares que pertenecen a R y S .

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .
- la *intersección* $R \cap S$ como los pares que pertenecen a R y S .
- la *diferencia* $R \setminus S$ como los pares que pertenecen a R , pero no S .

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .
- la *intersección* $R \cap S$ como los pares que pertenecen a R y S .
- la *diferencia* $R \setminus S$ como los pares que pertenecen a R , pero no S .

- **Ej:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .
- la *intersección* $R \cap S$ como los pares que pertenecen a R y S .
- la *diferencia* $R \setminus S$ como los pares que pertenecen a R , pero no S .

- **Ej:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.
 - $R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$, $S = \{(1, a), (2, b)\}$.

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .
- la *intersección* $R \cap S$ como los pares que pertenecen a R y S .
- la *diferencia* $R \setminus S$ como los pares que pertenecen a R , pero no S .

- **Ej:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.
 - $R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$, $S = \{(1, a), (2, b)\}$.
 - ¿ $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $S \setminus R$?

Operaciones de conjuntos

- Construir relaciones más complejas a partir de simples
- Modelar: y, o, no.

Def.

Sean $R, S \subseteq A \times B$ dos relaciones. Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como los pares que pertenecen a R o S .
- la *intersección* $R \cap S$ como los pares que pertenecen a R y S .
- la *diferencia* $R \setminus S$ como los pares que pertenecen a R , pero no S .

- **Ej:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.
 - $R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$, $S = \{(1, a), (2, b)\}$.
 - ¿ $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $S \setminus R$?
 - ¿Interpretación gráfica?

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Def.

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ dos relaciones.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Def.

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ dos relaciones.

Su *composición* es

$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}$.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Def.

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ dos relaciones.

Su *composición* es

$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}$.

- **Ej:** $A = \{\text{Web, Móvil}\}$, $B = \{\text{Auth, Pagos}\}$, $C = \{\text{Users, Transacc.}\}$.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Def.

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ dos relaciones.

Su *composición* es

$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}$.

- **Ej:** $A = \{\text{Web, Móvil}\}$, $B = \{\text{Auth, Pagos}\}$, $C = \{\text{Users, Transacc.}\}$.
 - $R = \{(\text{Web, Auth}), (\text{Web, Pagos}), (\text{Móvil, Auth})\}$

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Def.

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ dos relaciones.

Su *composición* es

$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}$.

- **Ej:** $A = \{\text{Web, Móvil}\}$, $B = \{\text{Auth, Pagos}\}$, $C = \{\text{Users, Transacc.}\}$.
 - $R = \{(\text{Web, Auth}), (\text{Web, Pagos}), (\text{Móvil, Auth})\}$
 - $S = \{(\text{Auth, Users}), (\text{Pagos, Transacciones})\}$.

Inversa y composición

- **Inversa:** dar vuelta los roles.

Def.

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

Su *inversa* es $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$.

- **Composición:** relacionados a través de intermediario.

Def.

Sean $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ dos relaciones.

Su *composición* es

$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}$.

- **Ej:** $A = \{\text{Web, Móvil}\}$, $B = \{\text{Auth, Pagos}\}$, $C = \{\text{Users, Transacc.}\}$.
 - $R = \{(\text{Web, Auth}), (\text{Web, Pagos}), (\text{Móvil, Auth})\}$
 - $S = \{(\text{Auth, Users}), (\text{Pagos, Transacciones})\}$.
 - ¿Interpretación? ¿Gráfica? ¿ R^{-1} , S^{-1} , $S \circ R$, $R \circ S$?

Potencias

- Si $A = B$ podemos componer la relación con si misma.

Potencias

- Si $A = B$ podemos componer la relación con si misma.

Def.

Sea R una relación sobre A . Definimos sus *potencias* recursivamente

Potencias

- Si $A = B$ podemos componer la relación con si misma.

Def.

Sea R una relación sobre A . Definimos sus *potencias* recursivamente

$$R^0 = \{(a, a) : a \in A\} \quad R^{n+1} = R^n \circ R \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Potencias

- Si $A = B$ podemos componer la relación con si misma.

Def.

Sea R una relación sobre A . Definimos sus *potencias* recursivamente

$$R^0 = \{(a, a) : a \in A\} \quad R^{n+1} = R^n \circ R \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- $x R^k y =$ “uso k veces R para llegar de x a y ”

Potencias

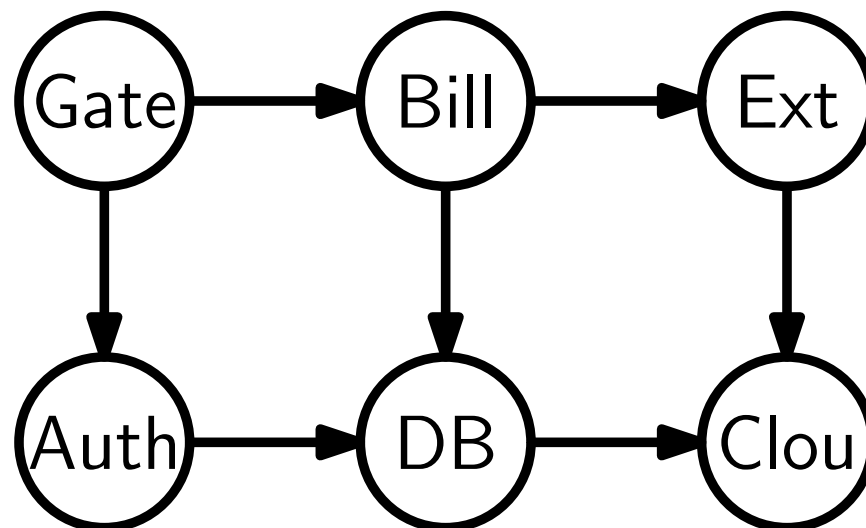
- Si $A = B$ podemos componer la relación con si misma.

Def.

Sea R una relación sobre A . Definimos sus *potencias* recursivamente

$$R^0 = \{(a, a) : a \in A\} \quad R^{n+1} = R^n \circ R \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- $x R^k y =$ “uso k veces R para llegar de x a y ”
- **Ej:** Interpretación gráfica



Potencias

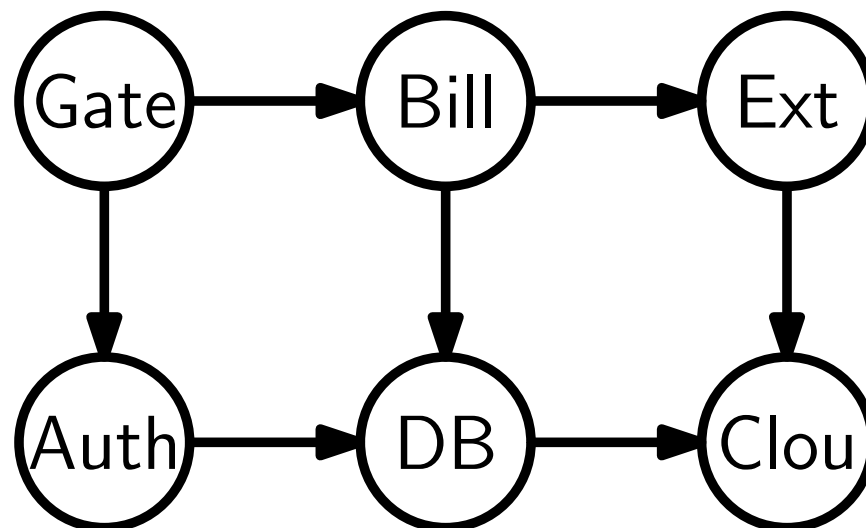
- Si $A = B$ podemos componer la relación con si misma.

Def.

Sea R una relación sobre A . Definimos sus *potencias* recursivamente

$$R^0 = \{(a, a) : a \in A\} \quad R^{n+1} = R^n \circ R \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- $x R^k y =$ “uso k veces R para llegar de x a y ”
- **Ej:** Interpretación gráfica



- ¿Interpretación? ¿Potencias?

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?
- **Clausura de R :** La relación más pequeña que contiene a R y cumple la propiedad.

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?
- **Clausura de R :** La relación más pequeña que contiene a R y cumple la propiedad.

Def.

Sea R una relación sobre A .

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?
- **Clausura de R :** La relación más pequeña que contiene a R y cumple la propiedad.

Def.

Sea R una relación sobre A .

La *clausura reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva* de R es una relación T tal que:

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?
- **Clausura de R :** La relación más pequeña que contiene a R y cumple la propiedad.

Def.

Sea R una relación sobre A .

La *clausura reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva* de R es una relación T tal que:

- T es reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva;

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?
- **Clausura de R :** La relación más pequeña que contiene a R y cumple la propiedad.

Def.

Sea R una relación sobre A .

La *clausura reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva* de R es una relación T tal que:

- T es reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva;
- $R \subseteq T$;

Clasificando relaciones sobre conjuntos

- Buenas propiedades de la relación: reflexividad, transitividad, simetría.
- ¿Cómo reparar una relación que no las tiene?
- ¿Agregando la menor cantidad de pares posibles?
- **Clausura de R :** La relación más pequeña que contiene a R y cumple la propiedad.

Def.

Sea R una relación sobre A .

La *clausura reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva* de R es una relación T tal que:

- T es reflexiva/simétrica/transitiva/reflexiva-transitiva;
- $R \subseteq T$;
- Si T' es otra relación reflexiva/simétrica/transitiva/refl.-trans. con $R \subseteq T'$, entonces $T \subseteq T'$.

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

Teo.

Sea R una relación sobre A .

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

Teo.

Sea R una relación sobre A .

- La clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

Teo.

Sea R una relación sobre A .

- La clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;
- La clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

Teo.

Sea R una relación sobre A .

- La clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;
- La clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- La clausura transitiva de R es $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$;

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

Teo.

Sea R una relación sobre A .

- La clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;
- La clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- La clausura transitiva de R es $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$;
- La clausura reflexiva-transitiva de R es $R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i$.

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

Teo.

Sea R una relación sobre A .

- La clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;
- La clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- La clausura transitiva de R es $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$;
- La clausura reflexiva-transitiva de R es $R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i$.

- **Dem:**

¿Cómo encontrar las clausuras?

- Lo mínimo que debo agregar:
 - ¿Para ser reflexivo?
 - ¿Para ser simétrico?
 - ¿Para ser transitivo?

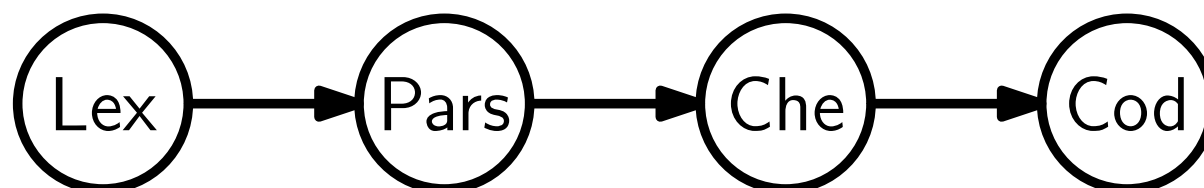
Teo.

Sea R una relación sobre A .

- La clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;
- La clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- La clausura transitiva de R es $R^+ = \bigcup_{i \geq 1} R^i$;
- La clausura reflexiva-transitiva de R es $R^* = \bigcup_{i \geq 0} R^i$.

• **Dem:**

• **Ejemplo:** ¿Clausuras?



Relación finita

- En una relación sobre cjto. finito no hay que chequear largos arbitrarios.

Relación finita

- En una relación sobre cjto. finito no hay que chequear largos arbitrarios.

Prop.

Sea R una relación sobre un conjunto A con n elementos.

Relación finita

- En una relación sobre cjto. finito no hay que chequear largos arbitrarios.

Prop.

Sea R una relación sobre un conjunto A con n elementos.

- La clausura transitiva de R es $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$;

Relación finita

- En una relación sobre cjto. finito no hay que chequear largos arbitrarios.

Prop.

Sea R una relación sobre un conjunto A con n elementos.

- La clausura transitiva de R es $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$;
- La clausura reflexiva-transitiva de R es $R^* = \bigcup_{i=0}^n R^i$.

Dudas/Preguntas

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales
 - 5 principios de inducción

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales
 - 5 principios de inducción
 - Débil, cb arbitrario, fuerte, fuerte múltiple cb, contraejemplo mínimo

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales
 - 5 principios de inducción
 - Débil, cb arbitrario, fuerte, fuerte múltiple cb, contraejemplo mínimo
- Relaciones

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales
 - 5 principios de inducción
 - Débil, cb arbitrario, fuerte, fuerte múltiple cb, contraejemplo mínimo
- Relaciones
 - Representación, orden, equivalencia, clases, funciones

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales
 - 5 principios de inducción
 - Débil, cb arbitrario, fuerte, fuerte múltiple cb, contraejemplo mínimo
- Relaciones
 - Representación, orden, equivalencia, clases, funciones
- Operaciones sobre relaciones

Unidad de demostraciones en lenguaje natural

- Técnicas inspiradas en deducción natural
 - Vienen de los conectivos + reglas de inferencia
- Objetos recursivos
 - Definición, definición de funciones, ind. estructural
- Inducción sobre los naturales
 - 5 principios de inducción
 - Débil, cb arbitrario, fuerte, fuerte múltiple cb, contraejemplo mínimo
- Relaciones
 - Representación, orden, equivalencia, clases, funciones
- Operaciones sobre relaciones
 - De conjuntos, inversa, composición, potencias, clausuras

Wrap-Up

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Próx. clase:**
 - Conteo y combinatoria