

Tema 3-2

Principio aditivo



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

Recuerdo

- **Con orden:** listas y permutaciones.

Objeto	Largo	Restricción	¿Cuántos?
Listas	k	sin restricción	n^k
Permutaciones	n	$c/u = 1$	$n!$
k -permutaciones	k	$c/u \leq 1$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\vec{a}$ -multipermutación	$\sum_{i=1}^k a_i$	objeto i : a_i veces	$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$ donde $n = \sum_{i=1}^k a_i$

Recuerdo

- **Con orden:** listas y permutaciones.

Objeto	Largo	Restricción	¿Cuántos?
Listas	k	sin restricción	n^k
Permutaciones	n	$c/u = 1$	$n!$
k -permutaciones	k	$c/u \leq 1$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\vec{a}$ -multipermutación	$\sum_{i=1}^k a_i$	objeto i : a_i veces	$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$ donde $n = \sum_{i=1}^k a_i$

- **Sin orden:** conjuntos.

Objeto	Sel.	¿Repetición?	¿Cuántos?
Conjuntos	k	sin repetición	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Multiconjuntos	k	con repetición	$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

- **Plan:**

- **Plan:**
 - Principio aditivo

- **Plan:**
 - Principio aditivo
 - Principio de inclusión-exclusión

Principio aditivo

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si son disjuntas par a par,

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si son disjuntas par a par,
- y cada alternativa T_i tiene n_i formas,

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si son disjuntas par a par,
- y cada alternativa T_i tiene n_i formas,
- entonces la tarea general tiene $n_1 + \dots + n_k$ formas.

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si son disjuntas par a par,
- y cada alternativa T_i tiene n_i formas,
- entonces la tarea general tiene $n_1 + \dots + n_k$ formas.

- Versión alternativa:

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si son disjuntas par a par,
- y cada alternativa T_i tiene n_i formas,
- entonces la tarea general tiene $n_1 + \dots + n_k$ formas.

- Versión alternativa:

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos disjuntos par a par. Tenemos que

Principio aditivo

- Segunda herramienta fundamental

Prin.

Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si son disjuntas par a par,
- y cada alternativa T_i tiene n_i formas,
- entonces la tarea general tiene $n_1 + \dots + n_k$ formas.

- Versión alternativa:

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos disjuntos par a par. Tenemos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Ejemplos del principio aditivo

- Una empresa escoge un comité paritario. La empresa tiene 25 empleados, 10 de ellos en RR. HH.; el comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de RR. HH. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?

Ejemplos del principio aditivo

- Una empresa escoge un comité paritario. La empresa tiene 25 empleados, 10 de ellos en RR. HH.; el comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de RR. HH. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?
- ¿Cuántas manos de póker tienen entre 2 y 3 corazones?

Ejemplos del principio aditivo

- Una empresa escoge un comité paritario. La empresa tiene 25 empleados, 10 de ellos en RR. HH.; el comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de RR. HH. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?
- ¿Cuántas manos de póker tienen entre 2 y 3 corazones?
- ¿Cuántas patentes chilenas hay?

Ejemplos del principio aditivo

- Una empresa escoge un comité paritario. La empresa tiene 25 empleados, 10 de ellos en RR. HH.; el comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de RR. HH. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?
- ¿Cuántas manos de póker tienen entre 2 y 3 corazones?
- ¿Cuántas patentes chilenas hay?
- ¿Cuántos anagramas de COMBINATORIA comienzan por vocal?

Ejemplos del principio aditivo

- Una empresa escoge un comité paritario. La empresa tiene 25 empleados, 10 de ellos en RR. HH.; el comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de RR. HH. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?
- ¿Cuántas manos de póker tienen entre 2 y 3 corazones?
- ¿Cuántas patentes chilenas hay?
- ¿Cuántos anagramas de COMBINATORIA comienzan por vocal?
- Una chocolatería ofrece T tipos de chocolate, uno de ellos es el *clásico*. ¿De cuántas formas pueden vender cajas de docenas de chocolates si tienen que contener a lo más 4 chocolates clásicos?

Ejemplos del principio aditivo

- Una empresa escoge un comité paritario. La empresa tiene 25 empleados, 10 de ellos en RR. HH.; el comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de RR. HH. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?
- ¿Cuántas manos de póker tienen entre 2 y 3 corazones?
- ¿Cuántas patentes chilenas hay?
- ¿Cuántos anagramas de COMBINATORIA comienzan por vocal?
- Una chocolatería ofrece T tipos de chocolate, uno de ellos es el *clásico*. ¿De cuántas formas pueden vender cajas de docenas de chocolates si tienen que contener a lo más 4 chocolates clásicos?
- Una clave de un banco **debe** tener largo k . Dichas claves pueden contener dígitos o letras del español. ¿Cuántas contienen a lo más $r \leq k$ letras?

Principio de inclusión-exclusión

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Prin.

Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Prin.

Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Prin.

Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- **Dem.:** Es consecuencia del principio aditivo.

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Prin.

Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- **Dem.:** Es consecuencia del principio aditivo.
- **Ej:**

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Prin.

Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- **Dem.:** Es consecuencia del principio aditivo.
- **Ej:**
 - ¿Cuántos enteros en $\{1, \dots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5?

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?
- 14 estudiantes juegan básquetbol, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?
- Diagrama de Venn.

Prin.

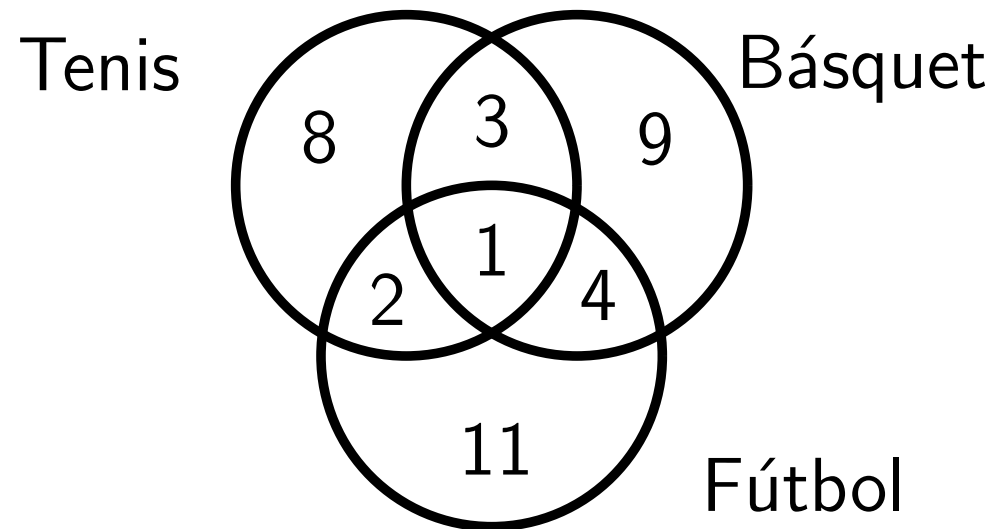
Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- **Dem.:** Es consecuencia del principio aditivo.
- **Ej:**
 - ¿Cuántos enteros en $\{1, \dots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5?
 - Tenemos n personas; dos de ellas se llaman Alicia y Bob. ¿Cuántos comités de k personas contienen a Alicia o a Bob?

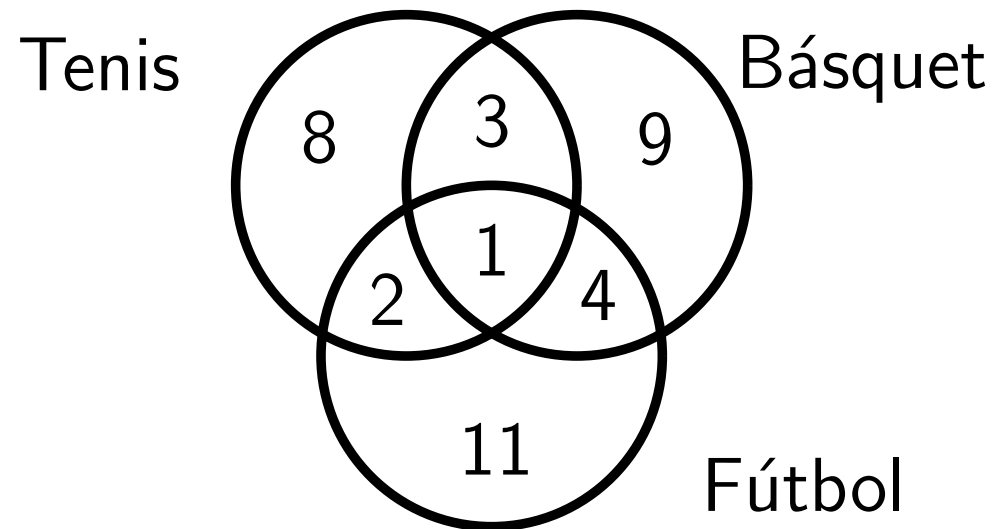
Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?



Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?

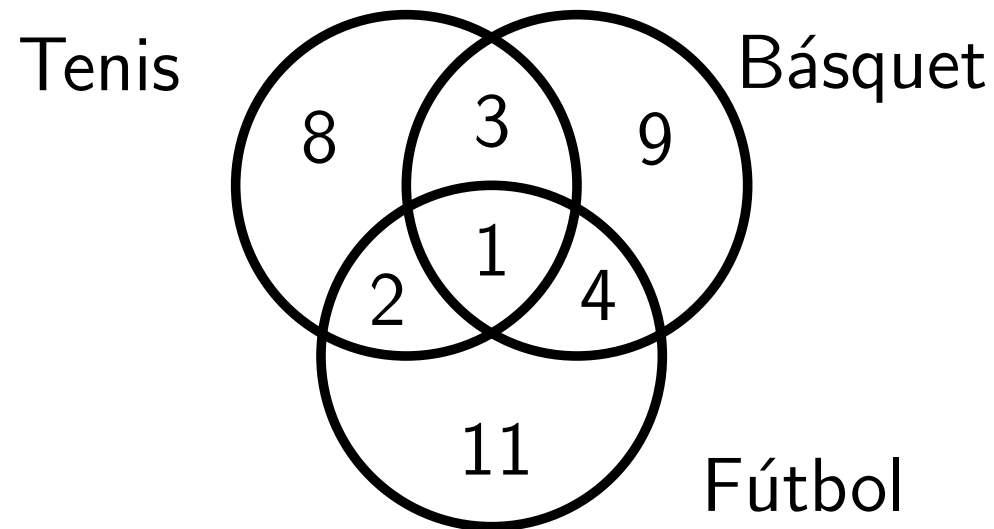


Prin.

Sean A, B, C conjuntos finitos. Tenemos que

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?



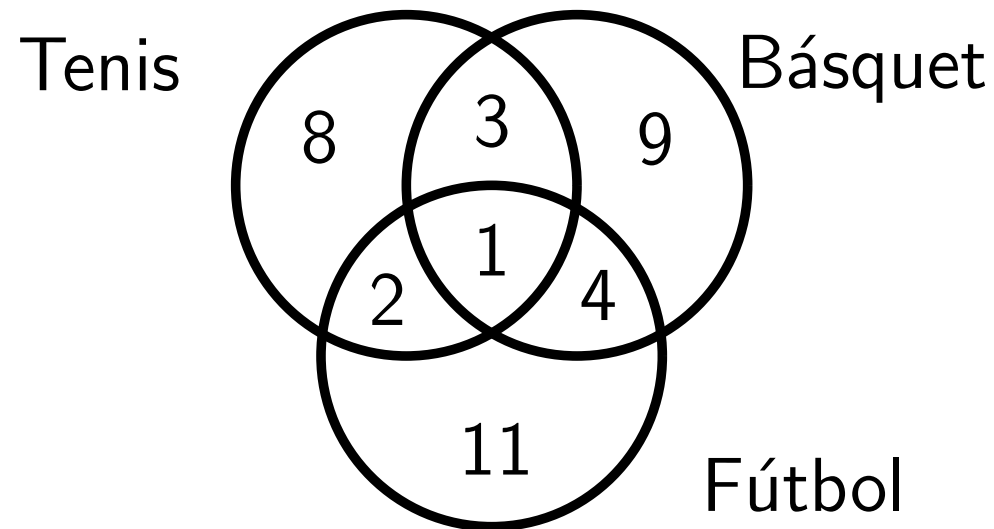
Prin.

Sean A, B, C conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?



Prin.

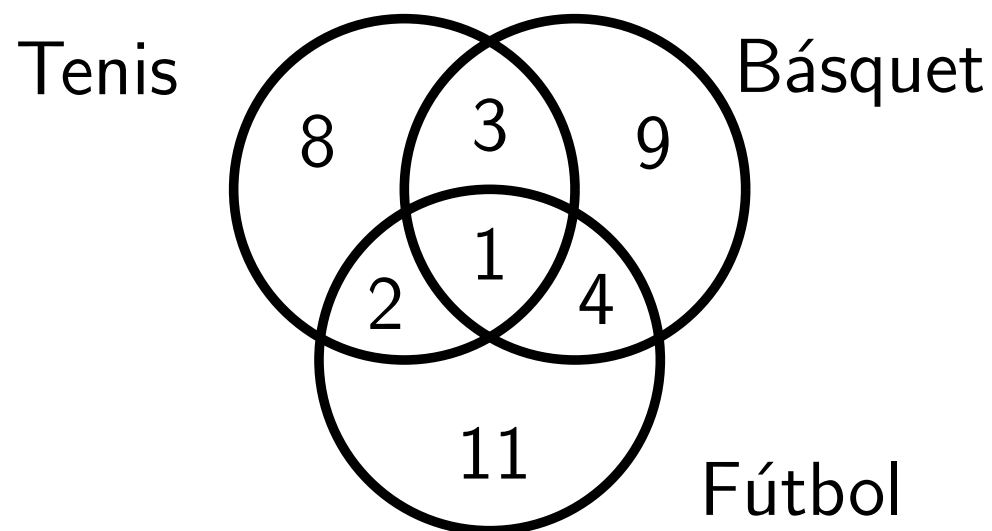
Sean A, B, C conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

- Ej:

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa si quiero contar un proceso en el que hay intersección?



Prin.

Sean A, B, C conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

- Ej:
 - ¿Cuántos enteros en $\{1, \dots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5 o 7?

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

- **Dem.:** basta con ver que cada $x \in \bigcup_i A_i$ aparece una vez en el LD.

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

- **Dem.:** basta con ver que cada $x \in \bigcup_i A_i$ aparece una vez en el LD.
- **Uso:** usualmente “en negativo” $\rightarrow A_i$: algo que no quiero que pase.

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

- **Dem.:** basta con ver que cada $x \in \bigcup_i A_i$ aparece una vez en el LD.
- **Uso:** usualmente “en negativo” $\rightarrow A_i$: algo que no quiero que pase.
- **Uso:** es posible contar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

- **Dem.:** basta con ver que cada $x \in \bigcup_i A_i$ aparece una vez en el LD.
- **Uso:** usualmente “en negativo” $\rightarrow A_i$: algo que no quiero que pase.
- **Uso:** es posible contar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$
- **Ej:**

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

- **Dem.:** basta con ver que cada $x \in \bigcup_i A_i$ aparece una vez en el LD.
- **Uso:** usualmente “en negativo” $\rightarrow A_i$: algo que no quiero que pase.
- **Uso:** es posible contar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$
- **Ej:**
 - En una fiesta hay n invitados, cada uno con su sombrero. Los invitados se dan cuenta, al volver a casa, de que ninguno volvió con su sombrero. ¿De cuántas formas puede ocurrir esto?

Principio de inclusión-exclusión

- ¿Qué pasa en general?

Prin.

Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_j}|$$

Los índices recorren los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

- **Dem.:** basta con ver que cada $x \in \bigcup_i A_i$ aparece una vez en el LD.
- **Uso:** usualmente “en negativo” $\rightarrow A_i$: algo que no quiero que pase.
- **Uso:** es posible contar $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$
- **Ej:**
 - En una fiesta hay n invitados, cada uno con su sombrero. Los invitados se dan cuenta, al volver a casa, de que ninguno volvió con su sombrero. ¿De cuántas formas puede ocurrir esto?
 - ¿Cuántas funciones sobreyectivas de $\{1, \dots, k\}$ en $\{1, \dots, n\}$ hay?

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Principio aditivo

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión.

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión.
- Principio de inclusión-exclusión general.

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión.
- Principio de inclusión-exclusión general.

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión.
- Principio de inclusión-exclusión general.

- **Próx. clase:**

- Principio biyectivo y demostraciones combinatoriales.

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión.
- Principio de inclusión-exclusión general.

- **Próx. clase:**

- Principio biyectivo y demostraciones combinatoriales.
- Principio del palomar.