

Tema 3-5

Funciones generatrices



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

■ Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**
 - Recurrencias

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**
 - Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Recurrencias
- Inspección, expansión y cambio de variable

- **Plan:**

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Recurrencias
- Inspección, expansión y cambio de variable

- **Plan:**

- Funciones generatrices

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Recurrencias
- Inspección, expansión y cambio de variable

- **Plan:**

- Funciones generatrices
- Cómo usarlas para resolver recurrencias

Funciones generatrices

Representando sucesiones

- **Distintas formas de representar sucesiones**

Representando sucesiones

- **Distintas formas de representar sucesiones**
 - Listando términos: $0, 1, 3, 7, 15, \dots$

Representando sucesiones

- **Distintas formas de representar sucesiones**

- Listando términos: $0, 1, 3, 7, 15, \dots$
- Recurrencia: $h_n = 2h_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$ con $h_0 = 0$.

Representando sucesiones

- **Distintas formas de representar sucesiones**

- Listando términos: $0, 1, 3, 7, 15, \dots$
- Recurrencia: $h_n = 2h_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$ con $h_0 = 0$.
- Fórmula cerrada: $h_n = 2^n - 1$.

Representando sucesiones

- **Distintas formas de representar sucesiones**
 - Listando términos: $0, 1, 3, 7, 15, \dots$
 - Recurrencia: $h_n = 2h_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$ con $h_0 = 0$.
 - Fórmula cerrada: $h_n = 2^n - 1$.
- **Hoy:** cuarta forma con potencia algebraica.

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Es decir,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Es decir,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

- Ej:

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Es decir,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

• Ej:

◦ **Hanoi:** $H(x) = x + 3x^2 + 7x^3 + 15x^4 + 31x^5 + 63x^6 + \dots$

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Es decir,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

- **Ej:**

- **Hanoi:** $H(x) = x + 3x^2 + 7x^3 + 15x^4 + 31x^5 + 63x^6 + \dots$

- **Fibonacci:** $F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots$

Función generatriz/generadora

Def.

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión.

La *función generatriz (ordinaria)* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Es decir,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

- **Ej:**

- **Hanoi:** $H(x) = x + 3x^2 + 7x^3 + 15x^4 + 31x^5 + 63x^6 + \dots$

- **Fibonacci:** $F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots$

- **Catalán:** $C(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + \dots$

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- Ej:

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- **Ej:**
 - ¿ $[x^3]F(x)$?

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- **Ej:**
 - ¿ $[x^3]F(x)$?

Def.

Sea ϕ una proposición.

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- Ej:
 - ¿ $[x^3]F(x)$?

Def.

Sea ϕ una proposición.

Definimos el *corchete de Iverson*.

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- **Ej:**
 - ¿ $[x^3]F(x)$?

Def.

Sea ϕ una proposición.

Definimos el *corchete de Iverson*.

$$[\phi] = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi \text{ es verdadero,} \\ 0 & \text{si } \phi \text{ es falso.} \end{cases}$$

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- Ej:
 - $[x^3]F(x)$?

Def.

Sea ϕ una proposición.

Definimos el *corchete de Iverson*.

$$[\phi] = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi \text{ es verdadero,} \\ 0 & \text{si } \phi \text{ es falso.} \end{cases}$$

- Ej:

Coeficientes y corchete de Iverson

Def.

Sea $A(x)$ una FGO.

Denotaremos por $[x^n]A(x)$ al coeficiente de x^n en la expansión de $A(x)$, es decir, $[x^n]A(x) = a_n$.

- Ej:
 - $\iota[x^3]F(x)$?

Def.

Sea ϕ una proposición.

Definimos el *corchete de Iverson*.

$$[\phi] = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi \text{ es verdadero,} \\ 0 & \text{si } \phi \text{ es falso.} \end{cases}$$

- Ej:
 - $a_n = [n = 0]$ y $b_n = [n = t]$, con $t \in \mathbb{N}$. $\iota A(x)$ y $B(x)$?

Series formales

- **Serie formal:**

Series formales

- **Serie formal:**
 - Convergencia **X**

Series formales

- **Serie formal:**
 - Convergencia 
 - Operaciones algebraicas 

Series formales

- **Serie formal:**

- Convergencia ✗
- Operaciones algebraicas ✓
- “Polinomios con infinitos términos” (conmutan, distribuyen, asocian)

Series formales

- **Serie formal:**

- Convergencia ✗
- Operaciones algebraicas ✓
- “Polinomios con infinitos términos” (conmutan, distribuyen, asocian)

Def.

Sean $A(x)$ y $B(x)$ funciones generatrices de las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ y $(b_n)_{n \geq 0}$ respectivamente.

Series formales

- **Serie formal:**

- Convergencia ✗
- Operaciones algebraicas ✓
- “Polinomios con infinitos términos” (conmutan, distribuyen, asocian)

Def.

Sean $A(x)$ y $B(x)$ funciones generatrices de las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ y $(b_n)_{n \geq 0}$ respectivamente.

Definimos la *suma*, *multiplicación por escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ y *multiplicación por monomio* x^k (con $k \in \mathbb{N}$) de funciones generatrices como sigue:

Series formales

- **Serie formal:**

- Convergencia ✗
- Operaciones algebraicas ✓
- “Polinomios con infinitos términos” (conmutan, distribuyen, asocian)

Def.

Sean $A(x)$ y $B(x)$ funciones generatrices de las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ y $(b_n)_{n \geq 0}$ respectivamente.

Definimos la *suma*, *multiplicación por escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ y *multiplicación por monomio* x^k (con $k \in \mathbb{N}$) de funciones generatrices como sigue:

$$A(x) + B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas
- Ej:

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

- Ej:

- $a_n = 1$. ¿ $A(x)$?

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

- **Ej:**

- $a_n = 1$. ¿ $A(x)$?

- $b_n = c$ con $c \in \mathbb{R}$. ¿ $B(x)$?

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

- **Ej:**

- $a_n = 1$. ¿ $A(x)$?
- $b_n = c$ con $c \in \mathbb{R}$. ¿ $B(x)$?
- $c_n = r^n$ con $r \in \mathbb{R}$ ¿ $C(x)$?

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

- **Ej:**

- $a_n = 1$. ¿ $A(x)$?
- $b_n = c$ con $c \in \mathbb{R}$. ¿ $B(x)$?
- $c_n = r^n$ con $r \in \mathbb{R}$ ¿ $C(x)$?
- $d_n = \binom{m}{n}$ con $m \in \mathbb{N}$

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

- **Ej:**

- $a_n = 1$. ¿ $A(x)$?
- $b_n = c$ con $c \in \mathbb{R}$. ¿ $B(x)$?
- $c_n = r^n$ con $r \in \mathbb{R}$ ¿ $C(x)$?
- $d_n = \binom{m}{n}$ con $m \in \mathbb{N}$
- $e_n = (-1)^n$. ¿ $E(x)$?

Calculando funciones generatrices

$$\lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n,$$

$$x^k A(x) = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n.$$

- Operar FGO $\rightarrow$ descripciones alternativas

- **Ej:**

- $a_n = 1$. ¿ $A(x)$?
- $b_n = c$ con $c \in \mathbb{R}$. ¿ $B(x)$?
- $c_n = r^n$ con $r \in \mathbb{R}$ ¿ $C(x)$?
- $d_n = \binom{m}{n}$ con $m \in \mathbb{N}$
- $e_n = (-1)^n$. ¿ $E(x)$?
- $f_n = [d \mid n]$, con $d \geq 1$ entero. ¿ $F(x)$?

Catálogo básico de FGO

Sucesión	Términos	Recurrencia	FGO
$x_n = c$	$c, c, c, c, c \dots$	$x_n = x_{n-1}$ $x_0 = c$	$\frac{c}{1-x}$
$y_n = r^n$	$1, r, r^2, r^3, r^4, \dots$	$y_n = r \cdot y_{n-1}$ $y_0 = 1$	$\frac{1}{1-rx}$
$z_n = \binom{m}{n}$	$\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{m}, 0, \dots$	$z_n = \frac{m-n+1}{n} z_{n-1}$ $z_0 = 1$	$(1+x)^m$

Resolviendo recurrencias con FGO

Resolver recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

Resolver recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Deducir su función generatriz $A(x)$

Resolver recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Deducir su función generatriz $A(x)$
- Expandir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ para obtener una fórmula cerrada

Resolver recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Deducir su función generatriz $A(x)$
- Expandir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ para obtener una fórmula cerrada

• Ej:

Resolver recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Deducir su función generatriz $A(x)$
- Expandir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ para obtener una fórmula cerrada

• Ej:

- **Torres de Hanoi:** $h_n = 2h_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$, con $h_0 = 0$.

Resolver recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Deducir su función generatriz $A(x)$
- Expandir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ para obtener una fórmula cerrada

- Ej:

- **Torres de Hanoi:** $h_n = 2h_{n-1} + 1$ para $n \geq 1$, con $h_0 = 0$.

- Forma sistemática para resolver recurrencias ✓

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$ y despejar.

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$ y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer a_n .

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$ y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer a_n .

• Ej:

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$ y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer a_n .

• Ej:

- **Fibonacci:** $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geq 1$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$ y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer a_n .

• Ej:

- **Fibonacci:** $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geq 1$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.
- $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ para $n \geq 3$.
 $a_0 = 3, a_1 = 2$ y $a_2 = 6$.

Resolviendo recurrencias con FGO

Idea

Para resolver una relación de recurrencia para a_n

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$ y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer a_n .

• Ej:

- **Fibonacci:** $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geq 1$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.
- $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ para $n \geq 3$.
 $a_0 = 3, a_1 = 2$ y $a_2 = 6$.
- Tablero $1 \times n$, cuadrados 1×1 y dominós 1×2 . No se permiten dos dominós consecutivos. Sea a_n la cantidad de teselaciones válidas, con $a_0 = 1$.

Catálogo de FGO

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
c	$\frac{c}{1-x}$
$(-1)^n$	$\frac{1}{1+x}$
r^n	$\frac{1}{1-rx}$
$\binom{m}{n}$	$(1+x)^m$

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
$[n=0]$	1
$[n=t]$	x^t
$[d n]$	$\frac{1}{1-x^d}$

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Funciones generatrices

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Funciones generatrices
 - Operaciones básicas de FGO

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Funciones generatrices
- Operaciones básicas de FGO
- Cómo usarlas para resolver recurrencias

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Funciones generatrices
- Operaciones básicas de FGO
- Cómo usarlas para resolver recurrencias

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Funciones generatrices
- Operaciones básicas de FGO
- Cómo usarlas para resolver recurrencias

- **Próx. clase:**

- Convolución de sucesiones y producto de FGO

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Funciones generatrices
- Operaciones básicas de FGO
- Cómo usarlas para resolver recurrencias

- **Próx. clase:**

- Convolución de sucesiones y producto de FGO
- Binomio generalizado