

Tema 3-8

Conteo con FGO



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

■ Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**
 - Funciones generatrices

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**
 - Funciones generatrices
 - Convolución de sucesiones

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**
 - Funciones generatrices
 - Convolución de sucesiones
 - Binomio generalizado

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Funciones generatrices
- Convolución de sucesiones
- Binomio generalizado

- **Plan:**

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Funciones generatrices
- Convolución de sucesiones
- Binomio generalizado

- **Plan:**

- Conteo con FGO

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Funciones generatrices
- Convolución de sucesiones
- Binomio generalizado

- **Plan:**

- Conteo con FGO
- Suma, producto y listas

Recuerdo: Catálogo de FGO

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
c	$\frac{c}{1-x}$
$(-1)^n$	$\frac{1}{1+x}$
r^n	$\frac{1}{1-rx}$
$\binom{m}{n}$	$(1+x)^m$
$n+1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$\binom{n+m-1}{n}$	$\frac{1}{(1-x)^m}$

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
$[n=0]$	1
$[n=t]$	x^t
$[d \mid n]$	$\frac{1}{1-x^d}$
$\binom{r}{n}$	$(1+x)^r$
$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$	$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

Conteo con FGO

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

La *función generatriz ordinaria* de $\mathcal{A}$ es la serie formal

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

La *función generatriz ordinaria* de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

La *función generatriz ordinaria* de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

- Ej:

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

La *función generatriz ordinaria* de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

- Ej:
 - Bitstrings con peso = largo. ¿ $A(x)$?

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

La *función generatriz ordinaria* de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

- Ej:
 - Bitstrings con peso = largo. $\wr A(x)$?
 - Caminos de Dyck con peso $\#$ de $\nearrow$. $\wr C(x)$?

Clases de objetos

- Peso = recurso consumido. Presupuesto n : consumo exactamente n .

Def.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n .

La *función generatriz ordinaria* de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

- Ej:
 - Bitstrings con peso = largo. ¿ $A(x)$?
 - Caminos de Dyck con peso $\#$ de $\nearrow$. ¿ $C(x)$?
 - Fijamos $k \in \mathbb{N}$. Subconjuntos de $[n]$ con k elementos y peso n (registramos también n). ¿FGO?

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x) + B(x).$$

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x) + B(x).$$

Dem:

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x) + B(x).$$

Dem:

- **Ej:**

Principio aditivo para FGO

- ¿Cómo contar alternativas disjuntas?

Teo.

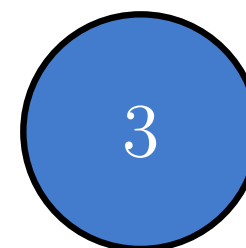
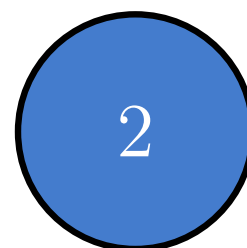
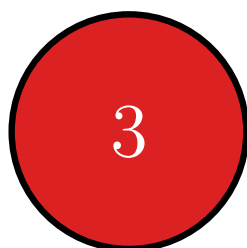
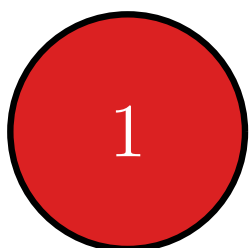
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x) + B(x).$$

Dem:

- **Ej:**
 - Fichas rojas: 1 y 3; azules: 2 y 3. ¿FGO de fichas según valor?



■ Principio aditivo para FGO

- Ej:

Principio aditivo para FGO

- Ej:

- Un código no vacío usa sólo letras de $\{a, b\}$ o sólo dígitos de $\{0, 1, 2\}$.

Principio aditivo para FGO

- Ej:

- Un código no vacío usa sólo letras de $\{a, b\}$ o sólo dígitos de $\{0, 1, 2\}$.
- ¿FGO según el largo del código?

a

b

0

1

2

Principio aditivo para FGO

- Ej:

- Un código no vacío usa sólo letras de $\{a, b\}$ o sólo dígitos de $\{0, 1, 2\}$.
- ¿FGO según el largo del código?

a

b

0

1

2

- ¿Qué cambia si permitimos el código vacío?

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Los objetos contruidos son pares ordenados.

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Los objetos contruidos son pares ordenados.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Los objetos contruidos son pares ordenados.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x)B(x).$$

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Los objetos contruidos son pares ordenados.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x)B(x).$$

Dem: Recordar que $[x^n]A(x)B(x) = a_n \star b_n$.

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Los objetos contruidos son pares ordenados.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x)B(x).$$

Dem: Recordar que $[x^n]A(x)B(x) = a_n \star b_n$.

- Ej:

Principio convolutivo

- ¿Y si elegimos un objeto de cada clase?

Teo.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Los objetos contruidos son pares ordenados.

Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x)B(x).$$

Dem: Recordar que $[x^n]A(x)B(x) = a_n \star b_n$.

- **Ej:**

- ¿Cuántas soluciones enteras existen de $e_1 + e_2 = 8$ sujetas a

$$2 \leq e_1 \leq 5, \quad 3 \leq e_2 \leq 6?$$

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

- Un número múltiplo de 4 de manzanas,

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

- Un número múltiplo de 4 de manzanas,
- Un múltiplo de 5 de frutillas,

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

- Un número múltiplo de 4 de manzanas,
- Un múltiplo de 5 de frutillas,
- Al menos 3 platanos,

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

- Un número múltiplo de 4 de manzanas,
- Un múltiplo de 5 de frutillas,
- Al menos 3 platanos,
- A lo más 5 naranjas

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

- Un número múltiplo de 4 de manzanas,
- Un múltiplo de 5 de frutillas,
- Al menos 3 platanos,
- A lo más 5 naranjas
- A lo más un limó

Más aplicaciones del principio convolutivo

- **Ej:**

- ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 galletas idénticas entre 3 perritos distintos, si cada uno recibe entre 2 y 4 galletas?
- Pagamos p mil pesos con billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, sin importar el orden.
- ¿FGO según p ?

- **Ej:** Juan quiere realizar una ensalada de frutas con n frutas.

- Un número múltiplo de 4 de manzanas,
- Un múltiplo de 5 de frutillas,
- Al menos 3 platanos,
- A lo más 5 naranjas
- A lo más un limó
- ¿FGO según número de frutas?

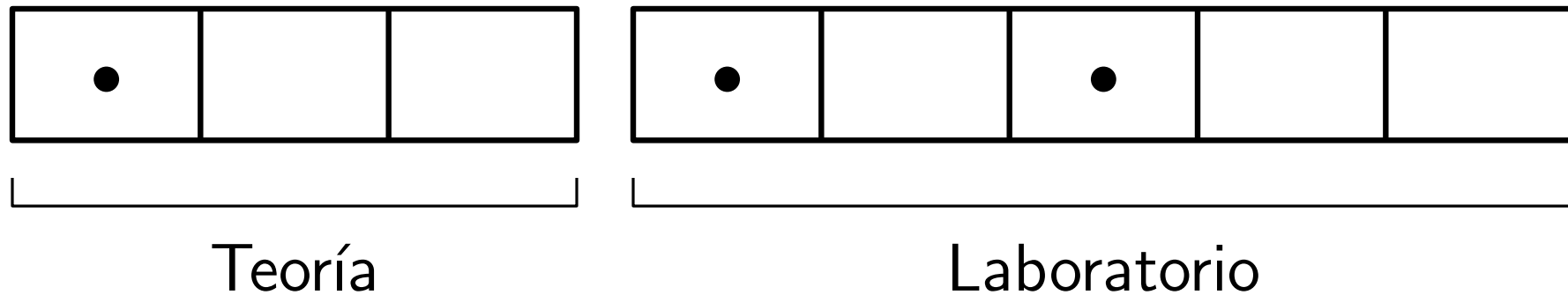
Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

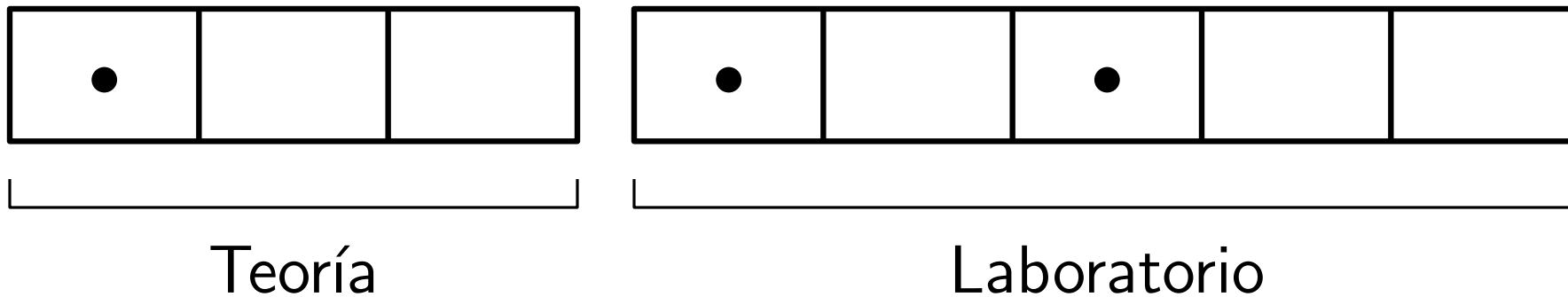
- Un curso de n días se divide en un bloque de teoría y luego uno de laboratorio: un control en teoría y dos en laboratorio.



Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- Un curso de n días se divide en un bloque de teoría y luego uno de laboratorio: un control en teoría y dos en laboratorio.

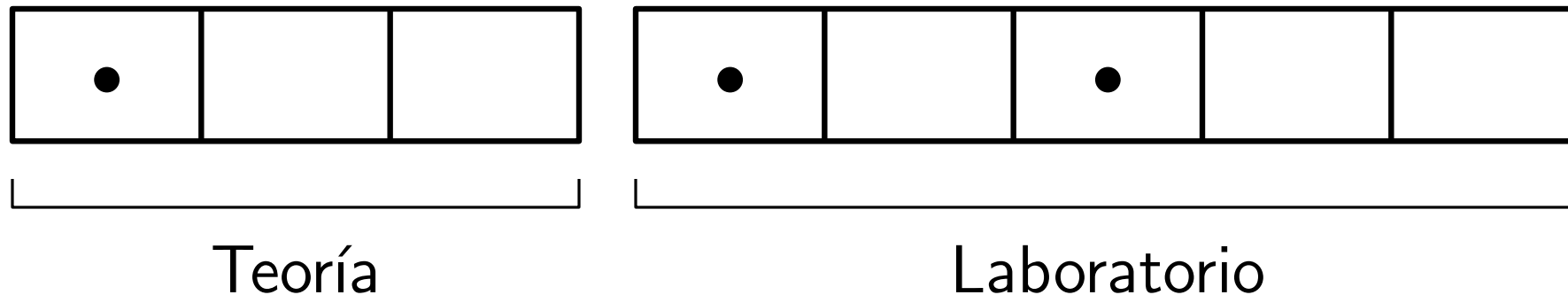


- ¿De cuántas formas se puede planificar el curso?

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- Un curso de n días se divide en un bloque de teoría y luego uno de laboratorio: un control en teoría y dos en laboratorio.



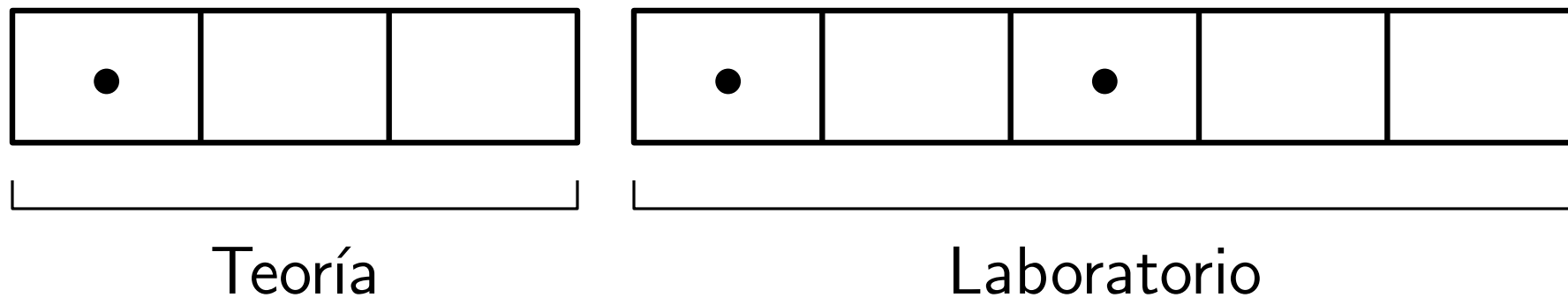
- ¿De cuántas formas se puede planificar el curso?

- Ej:

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- Un curso de n días se divide en un bloque de teoría y luego uno de laboratorio: un control en teoría y dos en laboratorio.



- ¿De cuántas formas se puede planificar el curso?

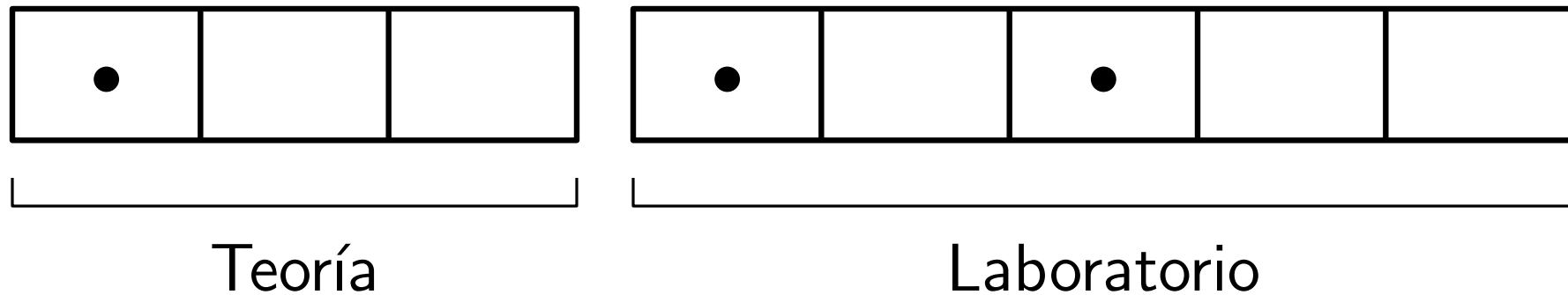
- Ej:

- Caminos de Dyck: c_n cuenta los caminos con n pasos ascendentes.

Más aplicaciones del principio convolutivo

- Ej:

- Un curso de n días se divide en un bloque de teoría y luego uno de laboratorio: un control en teoría y dos en laboratorio.



- ¿De cuántas formas se puede planificar el curso?

- Ej:

- Caminos de Dyck: c_n cuenta los caminos con n pasos ascendentes.
- ¿ $C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$ usando suma y producto?

Principio de las listas

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Teo.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$.

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Teo.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$.
Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos.

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Teo.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$.

Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos.

Entonces la FGO de esta clase es

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Teo.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$.

Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos.

Entonces la FGO de esta clase es

$$F(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Teo.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$.

Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos.

Entonces la FGO de esta clase es

$$F(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

Dem:

Principio de las listas

- ¿Y si la cantidad de elecciones no está fija?

Teo.

Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$.

Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos.

Entonces la FGO de esta clase es

$$F(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

Dem:

- ¿Por qué necesitamos $a_0 = 0$?

Principio de las listas

- Ej:

Principio de las listas

- Ej:

- Pagamos p mil pesos con m billetes de 1, 2 y 5 mil pesos; el orden importa.

Principio de las listas

- Ej:

- Pagamos p mil pesos con m billetes de 1, 2 y 5 mil pesos; el orden importa.
- Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, ¿FGO según p ?

Principio de las listas

- Ej:

- Pagamos p mil pesos con m billetes de 1, 2 y 5 mil pesos; el orden importa.
- Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, ¿FGO según p ?
- ¿Y si permitimos cualquier cantidad de billetes?

Principio de las listas

- Ej:

- Pagamos p mil pesos con m billetes de 1, 2 y 5 mil pesos; el orden importa.
- Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, ¿FGO según p ?
- ¿Y si permitimos cualquier cantidad de billetes?

- Ej:

Principio de las listas

- Ej:

- Pagamos p mil pesos con m billetes de 1, 2 y 5 mil pesos; el orden importa.
- Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, ¿FGO según p ?
- ¿Y si permitimos cualquier cantidad de billetes?

- Ej:

- Una fila fija de n personas se divide en unidades consecutivas no vacías, con un comandante en cada unidad.

Principio de las listas

- Ej:

- Pagamos p mil pesos con m billetes de 1, 2 y 5 mil pesos; el orden importa.
- Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, ¿FGO según p ?
- ¿Y si permitimos cualquier cantidad de billetes?

- Ej:

- Una fila fija de n personas se divide en unidades consecutivas no vacías, con un comandante en cada unidad.
- ¿FGO según el número de personas?

Dudas/Preguntas

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable
- Funciones generatrices ordinarias

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable
- Funciones generatrices ordinarias
 - Representar sucesiones y resolver recurrencias

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable
- Funciones generatrices ordinarias
 - Representar sucesiones y resolver recurrencias
- Convolución y binomio generalizado

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable
- Funciones generatrices ordinarias
 - Representar sucesiones y resolver recurrencias
- Convolución y binomio generalizado
- Conteo con FGO

Unidad de combinatoria

- Principios de conteo
 - Multiplicativo, aditivo e inclusión-exclusión.
- Objetos combinatoriales
 - Listas, permutaciones, multipermutaciones, conjuntos y multiconjuntos
- Demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar
- Recurrencias
 - Inspección, expansión y cambio de variable
- Funciones generatrices ordinarias
 - Representar sucesiones y resolver recurrencias
- Convolución y binomio generalizado
- Conteo con FGO
 - Suma, producto y listas

Recapitulación: fórmulas de conteo

- **Con orden:** listas y permutaciones.

Objeto	Largo	Restricción	¿Cuántos?
Listas	k	sin restricción	n^k
Permutaciones	n	$c/u = 1$	$n!$
k -permutaciones	k	$c/u \leq 1$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\vec{a}$ -multipermutación	$\sum_{i=1}^k a_i$	objeto i : a_i veces	$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$ donde $n = \sum_{i=1}^k a_i$

Rescapitulación: fórmulas de conteo

- **Con orden:** listas y permutaciones.

Objeto	Largo	Restricción	¿Cuántos?
Listas	k	sin restricción	n^k
Permutaciones	n	c/u = 1	$n!$
k -permutaciones	k	c/u ≤ 1	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\vec{a}$ -multipermutación	$\sum_{i=1}^k a_i$	objeto i : a_i veces	$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$ donde $n = \sum_{i=1}^k a_i$

- **Sin orden:** conjuntos.

Objeto	Sel.	¿Repetición?	¿Cuántos?
Conjuntos	k	sin repetición	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Multiconjuntos	k	con repetición	$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x .

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x .
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x .
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$, usar los valores iniciales y despejar.

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x .
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$, usar los valores iniciales y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer $a_n = [x^n]A(x)$.

Recurrencias con FGO

Para obtener una fórmula cerrada para a_n :

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Multiplicar la recurrencia por una potencia de x .
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia vale.
- Reescribir en términos de $A(x)$, usar los valores iniciales y despejar.
- Expandir $A(x)$ como serie formal y extraer $a_n = [x^n]A(x)$.
 - Para expandir: catálogo de FGO, binomio generalizado y fracciones parciales.

■ Wrap-up

- **Hoy:**

Wrap-up

- **Hoy:**
 - Suma: alternativas disjuntas

Wrap-up

- **Hoy:**

- Suma: alternativas disjuntas
- Producto: elecciones independientes que consumen mismo budget

Wrap-up

- **Hoy:**

- Suma: alternativas disjuntas
- Producto: elecciones independientes que consumen mismo budget
- Listas: una cantidad variable de elecciones

Wrap-up

- **Hoy:**

- Suma: alternativas disjuntas
- Producto: elecciones independientes que consumen mismo budget
- Listas: una cantidad variable de elecciones

- **Próx. clase:**

Wrap-up

- **Hoy:**

- Suma: alternativas disjuntas
- Producto: elecciones independientes que consumen mismo budget
- Listas: una cantidad variable de elecciones

- **Próx. clase:**

- Teoría de grafos