Trabajo dirigido C3

Definiciones de grafos

1. Un equipo mantiene una plataforma con los siguientes servicios:

   $$\texttt{frontend}, \texttt{api}, \texttt{auth}, \texttt{billing}, \texttt{db}, \texttt{cache}, \texttt{worker}, \texttt{email}.$$

   Un servicio puede depender de otro para responder una consulta. Los ingenieros registraron las siguientes dependencias directas:

   $$\texttt{frontend} \text{ usa } \texttt{api}, \qquad \texttt{api} \text{ usa } \texttt{auth}, \texttt{billing}, \texttt{cache},$$
   $$\texttt{auth} \text{ usa } \texttt{db}, \qquad \texttt{billing} \text{ usa } \texttt{db}, \texttt{worker},$$
   $$\texttt{worker} \text{ usa } \texttt{billing}, \texttt{email}, \qquad \texttt{email} \text{ usa } \texttt{db}.$$

   Se quiere responder las siguientes preguntas: qué servicios deben revisarse si cambia un servicio dado; si hay dependencias circulares; y qué servicios reciben muchas dependencias directas.

   a) Modele la situación como un grafo. Decida si debe ser dirigido o no dirigido, y explique qué representan los vértices y las aristas.

   b) Si se modifica `api`, determine qué servicios podrían verse afectados directa o indirectamente.

   c) Determine si existen dependencias circulares. Interprete.

   d) Calcule el grado de entrada y el grado de salida de cada servicio. ¿Qué información entrega cada uno?

2. Determine para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ existe un grafo simple con n vértices en el que todos los vértices tienen grado r. Demuestre que sus condiciones son necesarias y suficientes.
   Indicación: para construir ejemplos, le puede ser útil ordenar sus vértices en un círculo y pensar como agregar aristas.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $n \geq 1$ vértices y m aristas que no contiene triángulos. El objetivo de este ejercicio es demostrar que

   $$m \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

   a) Demuestre que $d(u) + d(v) \leq n$ para toda arista $uv \in E$.

   b) Deduzca que $\sum_{v \in V} d(v)^2 \leq nm$ y use $\sum_{v \in V}(d(v) - 2m/n)^2 \geq 0$ para concluir que $m \leq n^2/4$.

Isomorfismos

1. Un $(k, n)-$grafo es un grafo simple de n nodos, todos ellos de grado k. Considere el conjunto de nodos fijos $V = \{1, ..., 10\}$. Demuestre que la cantidad de $(2, 10)-$grafos no isomorfos que se pueden formar con V de vértices es 5.

2. Un grafo simple G es *autocomplementario* si es isomorfo a su complemento $\overline{G}$.

   a) Demuestre que, si G es autocomplementario y tiene n vértices, entonces $n \equiv 0$ o $n \equiv 1 \pmod 4$.

   b) Construya grafos autocomplementarios con 4 y con 5 vértices. Exhiba en cada caso un isomorfismo con su complemento.

Conectividad y árboles

1. Sea G un grafo simple con $n \geq 1$ vértices. Demuestre que si todo vértice tiene grado al menos $(n-1)/2$, entonces G es conexo. ¿Debe G ser conexo si todos los vértices tienen grado al menos $(n-1)/2 - 1$? Justifique su respuesta.

2. Sea G un grafo simple con al menos un vértice. Un subgrafo H de un grafo G se dice que es un **subgrafo inducido** si, para cada par de vértices $u, v \in V(H)$, existe una arista entre u y v en H si y solo si existe una arista entre u y v en G. En otras palabras, un subgrafo inducido de G está formado por un subconjunto de los vértices de G y todos las aristas entre esos vértices que están presentes en G. Demuestre que un grafo es un bosque **si y solo si** cada subgrafo conexo es un subgrafo inducido.
3. Sea T un árbol con n vértices. Demuestre que existe un vértice c tal que todas las componentes conexas de $T - c$ tienen a lo más $n/2$ vértices. Un vértice con esta propiedad se llama *centroide* de T.

Árboles generadores de costo mínimo

1. Sea G un grafo simple y conexo con pesos positivos w. Decida si cada afirmación es verdadera o falsa. Demuestre las verdaderas y dé un contraejemplo para las falsas.
   a) Si G tiene un único MST, entonces todos los pesos de sus aristas son distintos.
   b) Toda arista de peso mínimo de G pertenece a todos sus MST.
   c) Si reemplazamos cada peso $w(e)$ por $w(e)^2$, el conjunto de MST de G no cambia.
2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo con pesos w, y sea T un árbol generador de G. Para dos vértices distintos u, v, denotemos por $P_T(u, v)$ el único camino simple entre ellos en T.
   a) Demuestre que T es un MST si y sólo si, para toda arista $uv \in E \setminus E(T)$,
   $$w(uv) \geq \max\{w(f) : f \in E(P_T(u, v))\}.$$
   b) Demuestre que T es el único MST si y sólo si todas las desigualdades anteriores son estrictas.

Caminos más cortos

1. Sea G un grafo conexo con pesos positivos y sea $\text{dist}(u, v)$ la longitud de un camino más corto entre u y v. Demuestre la desigualdad triangular:
   $$\text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$$
   para todo $u, v, w \in V(G)$. Además, demuestre que si P es un camino de u a w cuya longitud es igual a $\text{dist}(u, w)$, entonces todo subcamino de P también es un camino más corto entre sus extremos.
2. Sea G un digrafo con pesos positivos w y sean s, t vértices distintos, con t alcanzable desde s.
   a) Demuestre que multiplicar todos los pesos por una misma constante positiva conserva exactamente los dicaminos de costo mínimo de s a t.
   b) ¿Ocurre lo mismo si sumamos una misma constante positiva a todos los pesos? Justifique con una demostración o un contraejemplo.
   c) ¿Ocurre lo mismo si reemplazamos cada peso $w(e)$ por $w(e)^2$? Compare con lo que ocurre en árboles generadores de costo mínimo.
3. Una persona quiere viajar desde s hasta t en una red de rutas dirigidas con costos positivos. Tiene un cupón que permite pagar la mitad del costo de una ruta, y puede usarlo a lo más una vez durante el viaje. Suponga que $s \neq t$ y que existe un dicamino de s a t.
   a) Modele el problema como uno de caminos más cortos en un nuevo digrafo. Explique qué representan sus vértices y arcos, y por qué una solución de su modelo corresponde a un viaje válido con el mismo costo.
   b) Suponga que ya conocemos, para cada vértice v, las distancias desde s hasta v y desde v hasta t en la red original. Exprese el costo óptimo con cupón usando esas distancias y los costos de las rutas.
   c) Notemos que ambas estrategias sugieren algoritmos distintos para resolver el problema. ¿Cúal de las dos estrategias es preferible? Discuta.

Coloreos y planaridad

1. Sea G un grafo simple con número cromático $\chi(G) = k$. Demuestre que el G tiene al menos $\frac{k(k-1)}{2}$ aristas.
   Sugerencia: considere una k-coloración de G y analice la relación entre clases de color.
2. Sea G un grafo simple y conexo, donde $|V(G)| \geq 11$. Demuestre que G o su complemento no puede ser planar.
3. Un grafo simple G con n vértices es *super planar* si existe un ciclo, digamos C, que contiene a los n vértices de G, y es posible hacer un dibujo planar de G tal que el ciclo C forma un polígono regular de n vértices y todas las otras aristas son internas al polígono. Demuestre que todo grafo super planar puede ser coloreado con 3 colores.

Recorribilidad

1. Dado un grafo G simple, podemos definir su grafo de línea $L(G)$ de la siguiente forma:
   - Cada arista de G corresponde a un vértice en $L(G)$.
   - Dos vértices distintos de $L(G)$ son adyacentes si y solo si las aristas correspondientes de G comparten un vértice común.

   Demuestre que si G es regular (o sea, todos los vértices tienen el mismo grado) y conexo, con al menos dos vértices, entonces $L(G)$ tiene circuito euleriano.
2. Sea G un grafo simple que tiene un ciclo hamiltoniano. Demuestre que para todo conjunto no vacío $S \subsetneq V(G)$, el grafo $G - S$ tiene a lo más $|S|$ componentes conexas.
3. En muchas situaciones queremos recorrer todos los patrones binarios de cierta longitud de la forma más compacta posible. Por ejemplo, esto aparece en pruebas exhaustivas de sistemas digitales, problemas de generación combinatorial y en ciertos problemas de codificación.
   Una forma eficiente de hacer lo anterior es mediante una *secuencia de de Bruijn*. Una *secuencia de de Bruijn* de orden n es un string circular de largo 2^n en el que cada string binario de largo n aparece *exactamente* una vez como bloque consecutivo circular. Por ejemplo

   $$00010111$$

   es una secuencia de de Bruijn de orden 3, pues sus bloques consecutivos circulares son

   $$000,\ 001,\ 010,\ 101,\ 011,\ 111,\ 110,\ 100.$$

   a) Para $r \in \mathbb{N},\ r \geq 1$ consideremos el digrafo B_r: sus vértices son los strings binarios de largo r, y para cada vértice $x_1x_2\cdots x_r \in \{0,1\}^r$ y cada $b \in \{0,1\}$ hay una arista dirigida

   $$x_1x_2\cdots x_r \longrightarrow x_2x_3\cdots x_rb.$$

   Dibuje B_2 y dé una secuencia de de Bruijn de orden 2. ¿Qué relación tienen las secuencias de de Bruijn de orden n con B_n? Argumente.

   b) Demuestre que para todo $n \geq 1$ el digrafo B_n tiene un circuito Euleriano.

   c) Dado un digrafo D su *digrafo de líneas* $L(D)$ se define de la siguiente manera: los vértices de $L(D)$ son las aristas de D, y hay una arista dirigida de e a f en $L(D)$ si el vértice donde termina e es el vértice donde comienza f.
   Dibuje $L(B_1)$ y compare con B_2 de la parte *a*). Muestre que para todo $n \geq 1$ los grafos $L(B_n)$ y B_{n+1} son isomorfos.
   Indicación: no olvide argumentar que su propuesta es efectivamente un isomorfismo.

   d) Sea D un digrafo con al menos una arista. Muestre que si D tiene un circuito Euleriano, entonces $L(D)$ tiene un ciclo Hamiltoniano. Use eso para concluir que existen secuencias de de Bruijn de orden n para todo $n \geq 2$.