

1.5. Inferencia en lógica de predicados

Nuevamente, nuestro objetivo al desarrollar una lógica, es poder hacer inferencia sobre ella. Nuevamente, nuestra herramienta principal será la deducción natural, que nos permitirá construir demostraciones de manera sistemática. De manera interesante, para la lógica proposicional, la deducción natural era una alternativa a la semántica de evaluar todas las posibles interpretaciones de una fórmula. Sin embargo, para la lógica de predicados, la semántica no es finita, y por lo tanto, la deducción natural se vuelve una herramienta aún más importante (pues no podemos evaluar todas las posibles interpretaciones de una fórmula).

Extenderemos entonces las reglas de deducción natural que ya conocíamos para la lógica proposicional, a los nuevos elementos de la lógica de predicados.

1.5.1. Inferencia con cuantificadores

Las reglas para los cuantificadores formalizan la idea de instanciar una función proposicional en un objeto particular o en un objeto arbitrario.

Primero, si sabemos que una propiedad se cumple para todos los objetos, podemos aplicarla a cualquier objeto particular que nos interese.

Inferencia ($\forall$ -eliminación). Si hemos demostrado $\forall x \phi(x)$, podemos concluir $\phi(t)$ para cualquier término t que pueda reemplazar a x sin capturar variables.

Gráficamente,

$$\frac{\forall x \phi(x)}{\phi(t)}.$$

Ejemplo. La regla permite completar el argumento que motivó la lógica de predicados:

1. $\forall x (\text{Persona}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x))$ (Premisa)
2. $\text{Persona}(s)$ (Premisa)
3. $\text{Persona}(s) \rightarrow \text{Mortal}(s)$ ($\forall$ -eliminación en 1)
4. $\text{Mortal}(s)$ ($\rightarrow$ -eliminación en 2 y 3)

Para demostrar una afirmación universal debemos razonar sobre un objeto cualquiera, sin aprovechar información accidental sobre un objeto que ya conocíamos. Necesitamos una forma de marcar que el nombre usado en ese razonamiento no estaba fijado de antemano.

Un *parámetro* es un símbolo de constante que usamos como nombre temporal de un objeto. Es *nuevo* para una parte de una derivación si no aparecía en las fórmulas ni en los supuestos activos anteriores a su introducción.

Ejemplo. Algo que no estaría permitido, es usar un objeto que ya aparece en la premisa para demostrar una afirmación universal. En particular, si a ya aparece en mi demostración y logramos concluir $P(a)$, no podemos concluir $\forall x P(x)$.

Cuando una demostración sobre un parámetro nuevo no depende de ninguna propiedad particular de este, el mismo razonamiento se aplica a todos los objetos del dominio.

Inferencia ($\forall$ -introducción). Sea a un parámetro nuevo que no aparece en $\forall x \phi(x)$ ni en ninguna premisa o supuesto activo. Si, tomando a como un objeto arbitrario, demostramos $\phi(a)$, podemos concluir $\forall x \phi(x)$.

Gráficamente,

$$\frac{\begin{array}{c} a \quad (\text{parámetro nuevo}) \\ \vdots \\ \phi(a) \quad (\text{conclusión temporal}) \end{array}}{\forall x \phi(x)}.$$

Ejemplo. Demostremos

$$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x (Q(x) \rightarrow R(x))\} \vdash \forall x (P(x) \rightarrow R(x)).$$

1. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ (Premisa)
2. $\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))$ (Premisa)

Sea a un parámetro nuevo y arbitrario.

3. $P(a)$ (Supuesto temporal)
4. $P(a) \rightarrow Q(a)$ ($\forall$ -eliminación en 1)
5. $Q(a)$ ($\rightarrow$ -eliminación en 3 y 4)
6. $Q(a) \rightarrow R(a)$ ($\forall$ -eliminación en 2)
7. $R(a)$ ($\rightarrow$ -eliminación en 5 y 6)
8. $P(a) \rightarrow R(a)$ ($\rightarrow$ -introducción, bloque 3–7)
9. $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$ ($\forall$ -introducción en 8)

Si conocemos un objeto concreto que cumple una propiedad, podemos asegurar que existe al menos uno.

Inferencia ($\exists$ -introducción). Si hemos demostrado $\phi(t)$ para algún término t , podemos concluir $\exists x \phi(x)$.

Gráficamente,

$$\frac{\phi(t)}{\exists x \phi(x)}.$$

Ejemplo. Supongamos que el predicado $\text{Par}(x)$ significa “ x es par”. Desde $\text{Par}(2)$ podemos inferir $\exists x \text{Par}(x)$.

La dirección contraria es un poco más delicada. Una premisa existencial garantiza un testigo, pero no nos revela quién es; por tanto, no podemos reemplazarlo por un objeto conocido ni dejar que su nombre aparezca en la conclusión final. La solución a esto es darle un nombre temporal dentro de una subdemostración.

Inferencia ($\exists$ -eliminación). Supongamos que hemos demostrado $\exists x \phi(x)$. Podemos abrir una subdemostración suponiendo $\phi(a)$ para un parámetro nuevo a . Si obtenemos una conclusión ψ que no menciona a a , podemos descargar el supuesto y concluir ψ . El parámetro a tampoco puede aparecer en la premisa existencial ni en otros supuestos activos.

Gráficamente,

$$\begin{array}{c}
 \exists x \phi(x) \\
 \phi(a) \quad (\text{supuesto temporal; } a \text{ nuevo}) \\
 \vdots \\
 \psi \quad (\text{conclusión temporal}) \\
 \hline
 \psi
 \end{array}$$

Ejemplo. Probemos

$$\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x (P(x) \wedge R(x))\} \vdash \exists x Q(x).$$

1. $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ (Premisa)
2. $\exists x (P(x) \wedge R(x))$ (Premisa)
3. $P(a) \wedge R(a)$ (Supuesto temporal; a nuevo)
4. $P(a)$ ($\wedge$ -eliminación en 3)
5. $P(a) \rightarrow Q(a)$ ($\forall$ -eliminación en 1)
6. $Q(a)$ ($\rightarrow$ -eliminación en 4 y 5)
7. $\exists x Q(x)$ ($\exists$ -introducción en 6)
8. $\exists x Q(x)$ ($\exists$ -eliminación en 2 y el bloque 3–7)

1.5.2. Inferencia con igualdad

Cuando dos términos nombran el mismo objeto, cualquier propiedad demostrada usando uno de esos nombres debe seguir siendo verdadera al usar el otro. Esto exige reglas que permitan razonar con la igualdad y sustituir iguales por iguales.

Inferencia (Reglas de igualdad). Para términos t, u, v podemos usar las siguientes reglas:

Refl. Podemos concluir $t = t$.

Simet. Si hemos demostrado $t = u$, podemos concluir $u = t$.

Trans. Si hemos demostrado $t = u$ y $u = v$, podemos concluir $t = v$.

Reem. Si hemos demostrado $t = u$ y $\phi(t)$, podemos concluir $\phi(u)$.

Gráficamente,

$$\frac{}{t = t} \quad \frac{t = u}{u = t} \quad \frac{t = u}{u = v} \quad \frac{t = u}{\frac{\phi(t)}{\phi(u)}}.$$

Ejemplo. Demostremos mediante deducción natural que

$$\{\forall x (\text{Cuadrado}(x) \rightarrow \text{Figura}(x)), \text{Cuadrado}(c), c = d\} \vdash \text{Figura}(d).$$

1. $\forall x (\text{Cuadrado}(x) \rightarrow \text{Figura}(x))$ (Premisa)
2. $\text{Cuadrado}(c)$ (Premisa)
3. $c = d$ (Premisa)
4. $\text{Cuadrado}(c) \rightarrow \text{Figura}(c)$ ($\forall$ -eliminación en 1)
5. $\text{Figura}(c)$ ($\rightarrow$ -eliminación en 2 y 4)
6. $\text{Figura}(d)$ (Reemplazo en 3 y 5)

El último paso es válido porque c y d nombran el mismo objeto: toda propiedad demostrada para el objeto nombrado por c también se cumple al nombrarlo por d .

Ejercicios

1. Muestre via deducción natural:

- (a) $\{\neg\neg\exists x P(x)\} \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))$.
- (b) $\{f(a) = b, b = c, R(f(a))\} \vdash R(c) \wedge c = f(a)$.
- (c) $\{P(a), \neg P(a)\} \vdash \exists x Q(x)$.
- (d) $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x(P(x) \wedge R(x)), \forall x((Q(x) \wedge R(x)) \rightarrow S(x))\} \vdash \exists x S(x)$.
- (e) $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))\} \vdash \forall x((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$.
- (f) $\{\exists x P(x), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))\} \vdash \neg\forall x R(x)$.
- (g) $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \neg\neg(P(x) \vee Q(x)))$.

2. Sea P un predicado unario y usemos $x \neq y$ como abreviatura de $\neg(x = y)$. Definimos

$$\text{Alguno}(P) := \exists x P(x),$$

$$\text{AloMasUno}(P) := \forall x \forall y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y),$$

$$\text{Uno}(P) := \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x)),$$

$$\text{Dos}(P) := \exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))).$$

- (a) Explique qué afirma cada fórmula.
- (b) Demuestre que $\text{Uno}(P)$ es equivalente a $\text{Alguno}(P) \wedge \text{AloMasUno}(P)$.

- (c) Demuestre $\{\text{Dos}(P)\} \vdash \text{Alguno}(P) \wedge \neg \text{Uno}(P)$. ¿Es verdad la implicación contraria? Justifique su respuesta.
- (d) ¿Podemos quitar de $\text{Dos}(P)$ el hecho que $x \neq y$? Justifique su respuesta.
- (e) Construya una estructura que muestre que, sin la cláusula universal final, la fórmula $\text{Dos}(P)$ puede ser verdadera con tres objetos que satisfacen P .
3. Suponga que usted tuviera un sistema de deducción natural para la lógica de predicados donde las reglas de igualdad satisficieran reflexividad y reemplazo.
- (a) Usando solamente Reflexividad y Reemplazo, derive $\{t = u\} \vdash u = t$.
- (b) Usando solamente Reflexividad y Reemplazo, derive $\{t = u, u = v\} \vdash t = v$.
- (c) Demuestre $\{t = u\} \vdash f(t) = f(u)$ y generalice a funciones de aridad arbitraria.
- (d) Para toda fórmula $\varphi(z)$, demuestre
- $$\{t = u\} \vdash \varphi(t) \leftrightarrow \varphi(u).$$
- (e) Pruebe únicamente con Reflexividad, Reemplazo y las reglas lógicas que
- $$\vdash \forall x(x = x), \quad \vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x), \quad \vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z).$$
- (f) ¿Qué puede concluir de los ítems anteriores? Discuta.