

2.3. Inducción en los números naturales

2.3.1. Inducción débil

En esta sección nos enfocaremos en una estructura recursiva particular: los números naturales. Estos se generan a partir de $B = \{0\}$ y $\mathcal{F} = \{n \mapsto n + 1\}$ y al especializar el principio de inducción estructural a estos objetos obtenemos el *principio de inducción débil*.

¿Qué ocurre al especializar el principio de inducción estructural a los números naturales? Notemos que hay un sólo caso base, que es 0, y un sólo constructor, que es $n \mapsto n + 1$. Por lo tanto, el principio de inducción estructural nos dice que, para demostrar una propiedad $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, basta con demostrar que $P(0)$ es verdadera y que, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ también es verdadera.

Principio (Inducción débil). Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(0)$ es verdadera (caso base).
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos un par de ejemplos de cómo aplicar el principio de inducción débil para demostrar una afirmación.

Ejemplo. Comencemos con una identidad para sumas, que permite reconocer el esquema básico de una demostración por inducción.

Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración. ■ **Caso base:** Para $n = 0$, la suma vacía es $\sum_{k=1}^0 k = 0$ y $\frac{0(0+1)}{2} = 0$, por lo que la afirmación es verdadera.

■ **Hipótesis inductiva:** $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

■ **Paso inductivo:** Veamos que la afirmación es verdadera para $n + 1$. En efecto,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Por el principio de inducción, concluimos que la afirmación es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. □

En el ejemplo anterior podemos ver un esquema clásico de las demostraciones por inducción: en el paso inductivo, buscamos como hacer aparecer la hipótesis inductiva, y luego usamos esa hipótesis para deducir la afirmación para $n + 1$.

Ejemplo. Veamos un segundo ejemplo, esta vez con una afirmación más compleja.

Una pieza de tromino es una figura formada por tres cuadrados adyacentes en forma de L.

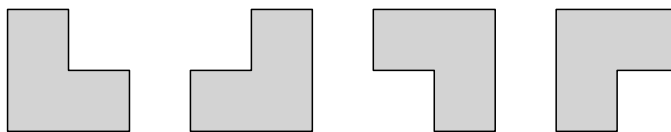


Figura 2.1: Una pieza de tromino.

Proposición. Todo tablero de ajedrez de tamaño $2^n \times 2^n$ con una casilla faltante puede ser cubierto completamente con piezas de tromino, cada una formada por tres cuadrados adyacentes en forma de L.

Demostración. ■ **Caso base:** Para $n = 0$, el tablero es de tamaño 1×1 y tiene una casilla faltante, por lo que no hay nada que cubrir, y la afirmación es verdadera.

■ **Hipótesis inductiva:** Todo tablero de ajedrez de tamaño $2^n \times 2^n$ con una casilla faltante puede ser cubierto completamente con piezas de tromino.

■ **Paso inductivo:** Veamos que la afirmación es verdadera para $n + 1$. Particionemos el tablero de ajedrez de tamaño $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ con una casilla faltante en cuatro subtableros de tamaño $2^n \times 2^n$. Uno de estos subtableros tendrá la casilla faltante, mientras que los otros tres estarán completos. Colocamos una pieza de tromino en el centro del tablero, cubriendo una casilla de cada uno de los tres subtableros completos. Esto deja cada uno de los cuatro subtableros con exactamente una casilla faltante. Por la hipótesis inductiva, cada uno de estos subtableros puede ser cubierto completamente con piezas de tromino. Por lo tanto, el tablero completo también puede ser cubierto completamente con piezas de tromino.

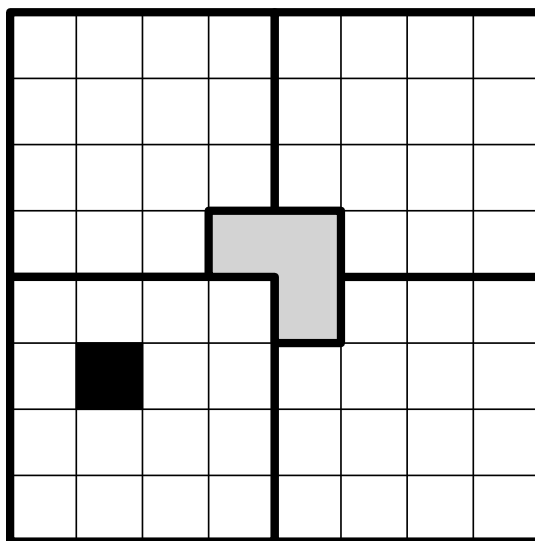


Figura 2.2: Esquema del paso inductivo para el problema del tromino.

Por el principio de inducción, concluimos que la afirmación es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

A veces el paso inductivo requiere usar una hipótesis más fuerte de lo que queremos demostrar. Usualmente uno logra darse cuenta de esto cuando intenta hacer el paso inductivo y se da cuenta de que no puede usar la hipótesis inductiva para deducir la afirmación para $n + 1$. Esto podría parecer contraintuitivo, pero es simplemente el hecho de que una conclusión más poderosa, nos da una premisa más fuerte para usar en el paso inductivo, lo que nos permite deducir la afirmación para $n + 1$.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de esto con el juego de las Torres de Hanoi. En el juego de las Torres de Hanoi, tenemos tres varillas A , B y C y n discos de diferentes tamaños que pueden deslizarse sobre cualquiera de las varillas. El juego comienza con los discos apilados en A en orden decreciente de tamaño, es decir, el disco más pequeño está en la parte superior y el más grande en la parte inferior. El objetivo es mover toda la pila de discos de A a C , siguiendo estas reglas:

- Solo se puede mover un disco a la vez.
- Cada movimiento consiste en tomar el disco superior de una de las pilas y deslizarlo sobre otra pila, encima de los discos que ya están allí.
- No se puede colocar un disco más grande sobre uno más pequeño.

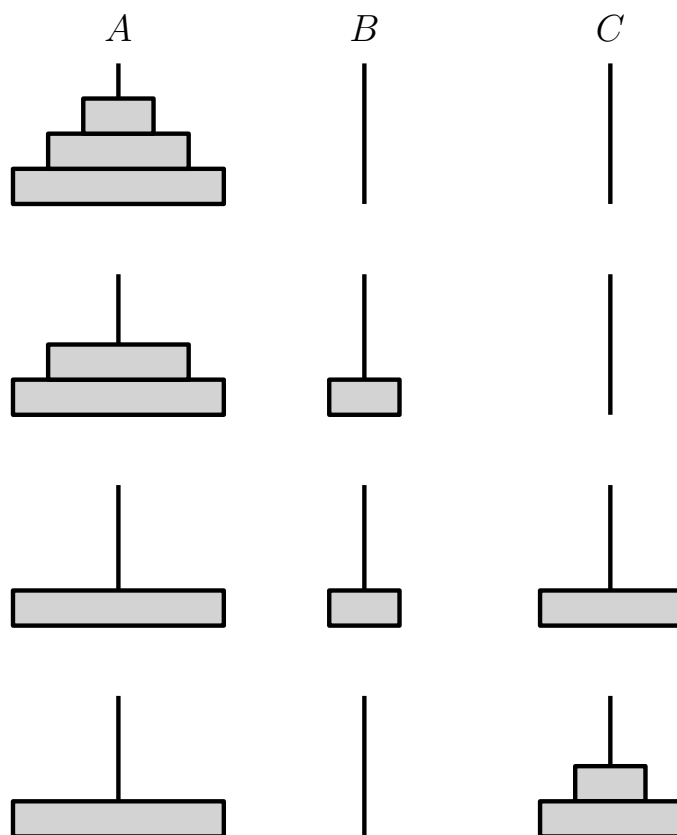


Figura 2.3: Una secuencia de 3 movimientos válidos en el juego de las Torres de Hanoi para $n = 3$.

Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier par de varillas distintas $X, Y \in \{A, B, C\}$, es posible mover una pila de n discos de X a Y , moviendo sólo el disco superior de una varilla a la vez y sin colocar un disco más grande sobre uno más pequeño.

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación de que, para cualquier par de varillas distintas $X, Y \in \{A, B, C\}$, es posible mover una pila de n discos de X a Y .

- **Caso base:** Para $n = 0$, no hay discos que mover, por lo que la afirmación es verdadera.
- **Hipótesis inductiva:** $P(n)$ es verdadera.
- **Paso inductivo:** Veamos que la afirmación es verdadera para $n + 1$. Fijemos varillas distintas X, Y y sea Z la tercera varilla. Primero movemos los primeros n discos de la varilla X a la varilla Z , usando la hipótesis inductiva. Luego, movemos el disco más grande, el disco número $n + 1$, de la varilla X a la varilla Y . Finalmente, movemos los n discos que habíamos movido a la varilla Z a la varilla Y , usando nuevamente la hipótesis inductiva. Esta misma secuencia de movimientos sigue siendo válida aunque el disco más grande esté en Y , pues todos los discos que movemos sobre él son menores.

Por el principio de inducción, concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, es posible mover una pila de n discos de la varilla A a la varilla C , por lo que el juego siempre es posible de resolver. $\square$

2.3.2. Principio de inducción desde un caso base arbitrario

Una primera generalización a considerar es cuando el caso base no es $n = 0$, sino algún otro número natural n_0 .

Notemos que esto se obtiene *sobrecargando* el principio de inducción débil, al considerar la propiedad $P(n)$ como $Q(n_0 + n)$, donde $Q(n)$ es la propiedad que queremos demostrar para todo $n \geq n_0$.

Principio (Inducción desde un caso base arbitrario). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base).
- Para todo $n \geq n_0$, si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de cómo aplicar el principio de inducción general para demostrar una afirmación. Suponga que tenemos un parque con $2n + 1$ personas distribuidas de tal forma que todas las distancias entre ellas son distintas. A la señal, cada persona dispara a la persona más cercana a ella.

Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, supongamos que hay $2n + 1$ personas tales que todas las distancias entre ellas son distintas. Si cada persona dispara a la más cercana, entonces al menos una persona no sufre un disparo.

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación de que, cada distribución de $2n + 1$ personas que cumpla las condiciones dadas, al menos una persona no sufre un disparo.

- **Caso base:** Para $n = 1$ tenemos tres personas, cada una a una distancia distinta de las otras dos. Sean A y B las dos personas más cercanas entre sí, y C la persona restante. Entonces, A dispara a B , B dispara a A , y C dispara a la persona más cercana, que es A o B . En cualquier caso, C no sufre un disparo, por lo que la afirmación es verdadera.
- **Hipótesis inductiva:** $P(n)$ es verdadera.
- **Paso inductivo:** Veamos que la afirmación es verdadera para $n + 1$. Sean A y B las dos personas más cercanas entre sí. Luego, A dispara a B y B dispara a A . Tenemos dos casos.
 - **Caso 1:** Nadie más dispara a A o B . Al quitar a A y B , cada una de las $2n + 1$ personas restantes conserva como objetivo a la misma persona que antes. Por la hipótesis inductiva, al menos una de las personas que no es A ni B no sufre un disparo.
 - **Caso 2:** Alguien más dispara a A o B . De los $2n + 1$ disparos hechos por las personas restantes, al menos uno se dirige a A o B . Por lo tanto, a lo más $2n$ de esos disparos se dirigen a las $2n + 1$ personas restantes, y al menos una de ellas no sufre un disparo. $\square$

2.3.3. Inducción fuerte

Formularemos ahora una variante del principio de inducción que permite que el paso inductivo use la hipótesis inductiva para todos los números naturales anteriores al número que queremos tratar, en vez de sólo para su predecesor.

Nuevamente, esto se obtiene *sobrecargando* el principio de inducción débil, al considerar la propiedad $P(n)$ como $Q(n_0) \wedge Q(n_0 + 1) \wedge \cdots \wedge Q(n_0 + n)$, donde $Q(n)$ es la propiedad que queremos demostrar para todo $n \geq n_0$.

Principio (Inducción fuerte). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base).
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_0$, si $P(k)$ es verdadera para todo k tal que $n_0 \leq k < n$, entonces $P(n)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Ejemplo. Consideraremos un ejemplo de cómo aplicar el principio de inducción fuerte para demostrar una afirmación. Consideremos el siguiente juego de fichas de un jugador:

- Comenzamos con una pila de n fichas, donde $n \geq 1$.

- En cada turno, podemos dividir una pila de tamaño k en dos pilas de tamaños $a, b \geq 1$ tales que $a + b = k$. Hacer esta jugada nos da un puntaje de ab .
- El juego termina cuando no podemos hacer más jugadas, es decir, cuando todas las pilas tienen tamaño 1.

Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, el puntaje total del juego anterior al terminar con pilas de tamaño 1 es $\frac{n(n-1)}{2}$, independientemente de las jugadas que se hagan.

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación de la proposición para una pila inicial de n fichas.

- **Caso base:** Para $n = 1$ tenemos una pila de tamaño 1, por lo que no podemos hacer ninguna jugada, y el puntaje total es 0, que es igual a $\frac{1(1-1)}{2}$.
- **Hipótesis inductiva:** Sea $n > 1$ y supongamos que $P(k)$ es verdadera para todo k tal que $1 \leq k < n$.
- **Paso inductivo:** Consideremos cualquier jugada que se haga en el primer turno, es decir, cualquier división de la pila de tamaño n en dos pilas de tamaños $a, b \geq 1$ tales que $a + b = n$. Por esta jugada, obtenemos un puntaje de ab . Además, $a, b < n$, por lo que la hipótesis inductiva se aplica a los dos juegos que continúan desde estas pilas. Por lo tanto, el puntaje total es

$$\begin{aligned} ab + \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} &= \frac{2ab + a^2 - a + b^2 - b}{2} \\ &= \frac{(a+b)^2 - (a+b)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

2.3.4. Inducción fuerte con múltiples casos base

Consideraremos por último una variante del principio de inducción fuerte, en el que probaremos varios casos bases $\{n_0, \dots, n_1\}$, y luego haremos el paso inductivo para $n > n_1$.

Una vez más, esto se obtiene *sobrecargando* el principio de inducción fuerte, al considerar la propiedad $P(n)$ como $Q(n_0) \wedge Q(n_0 + 1) \wedge \dots \wedge Q(n_1) \wedge Q(n_1 + 1) \wedge \dots \wedge Q(n_1 + n)$, donde $Q(n)$ es la propiedad que queremos demostrar para todo $n \geq n_0$.

Principio (Inducción fuerte con múltiples casos base). Sea $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \leq n_1$. Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n)$ es verdadera para todo n tal que $n_0 \leq n \leq n_1$ (casos base).
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_1$, si $P(k)$ es verdadera para todo k tal que $n_0 \leq k < n$, entonces $P(n)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Lo interesante acá, es que sólo necesitamos probar el paso inductivo para $n > n_1$, pero podemos usar la hipótesis inductiva para todo k tal que $n_0 \leq k < n$.

Ejemplo. Veamos un ejemplo de cómo aplicar esta variante del principio de inducción fuerte para demostrar una afirmación.

Consideremos el siguiente problema de compra de nuggets: Una cadena de comida rápida vende nuggets en bolsas de 3 unidades o cajitas de 5 unidades.

Proposición. Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 8$, es posible comprar exactamente n nuggets usando bolsas de 3 o cajitas de 5 unidades.

Demostración. Sea $P(n)$ la afirmación de que es posible comprar exactamente n nuggets usando bolsas de 3 o cajitas de 5 unidades.

- **Casos base:** Para $n = 8$, podemos comprar exactamente 8 nuggets usando una bolsa de 3 unidades y una cajita de 5 unidades. Para $n = 9$, podemos comprar exactamente 9 nuggets usando tres bolsas de 3 unidades. Para $n = 10$, podemos comprar exactamente 10 nuggets usando dos cajitas de 5 unidades. Por lo tanto, $P(n)$ es verdadera para todo n tal que $8 \leq n \leq 10$.
- **Hipótesis inductiva:** Sea $n > 10$ y supongamos que $P(k)$ es verdadera para todo k tal que $8 \leq k < n$.
- **Paso inductivo:** Como $8 \leq n - 3 < n$, por la hipótesis inductiva es posible comprar exactamente $n - 3$ nuggets usando bolsas de 3 o cajitas de 5 unidades. Entonces, podemos comprar exactamente n nuggets usando una bolsa de 3 unidades adicional a lo que ya compramos para obtener $n - 3$ nuggets. $\square$

2.3.5. Contraejemplo minimal y el principio del buen orden

Discutiremos ahora una visión alternativa de los argumentos inductivos, basada en el principio del buen orden.

Principio (del buen orden). Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío de números naturales. Entonces, S tiene un elemento mínimo; es decir, existe un número natural $m \in S$ tal que $m \leq n$ para todo $n \in S$.

Este principio nos llevará a las *demostraciones por contraejemplo minimal*. Nuevamente, el objetivo es demostrar que una propiedad $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$, pero esta vez el razonamiento será usualmente por contradicción, definiendo el conjunto de contraejemplos a $P(n)$ como

$$S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ y } P(n) \text{ es falsa}\}.$$

Luego, usamos el principio del buen orden para obtener un número m que es el menor contraejemplo entre los números mayores o iguales que n_0 , y luego construir un $m' < m$ que también es un contraejemplo, lo cual es una contradicción. Esto es una contradicción, ya que m era el elemento mínimo de S (o el menor contraejemplo). Por esto mismo, también se conocen como *demostraciones por contraejemplo minimal*.

Ejemplo. Podemos redemostrar el teorema de los nuggets usando el principio del buen orden.

Proposición. Para todo $n \geq 8$, es posible comprar exactamente n nuggets usando bolsas de 3 o cajitas de 5 unidades.

Demostración. Supongamos, en busca de una contradicción, que existe un número $n \geq 8$ tal que no es posible comprar exactamente n nuggets usando bolsas de 3 o cajitas de 5 unidades. Por el principio del buen orden, existe un $m \geq 8$ que es el menor contraejemplo a la afirmación.

Más aún, como $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, y $10 = 5 + 5$, tenemos que $m \geq 11$. Notemos que si fuera imposible comprar exactamente m nuggets, entonces también sería imposible comprar exactamente $m - 3$ nuggets, ya que si pudiéramos comprar exactamente $m - 3$ nuggets, podríamos comprar exactamente m nuggets comprando una bolsa de 3 unidades adicional a lo que ya compramos para obtener $m - 3$ nuggets. Por lo tanto, $m - 3 \geq 8$ es un contraejemplo menor que m , lo cual contradice la minimalidad de m . $\square$

Ejercicios

1. a) Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

- b) Demuestre que $2^n \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.
- c) Recordemos que un entero $p \geq 2$ es *primo* si sus únicos divisores positivos son 1 y p . Demuestre que todo entero $n \geq 2$ puede escribirse como un producto de primos.
- d) Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 18$, existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $n = 4a + 7b$.

2. Dos jugadores J1 y J2 juegan el siguiente juego:

- El juego parte con un número entero $n \geq 1$ de fichas.
- Los jugadores alternan turnos, comenzando con J1.
- En cada turno, el jugador actual elige un número $r \in \{1, 2, 3\}$ y quita r fichas de la pila; es decir, reemplaza n por $n - r$.
- El jugador que quita la última ficha gana el juego.

- a) Muestre que J1 tiene una estrategia ganadora si y sólo si n no es múltiplo de 4.
- b) Suponga ahora que las reglas del juego son modificadas de la siguiente manera: En cada turno, el jugador actual elige un divisor d de n con $1 \leq d \leq n$ y quita d fichas, es decir reemplaza n por $n - d$ y el jugador que quita la última ficha **pierde** el juego. Muestre que J1 tiene una estrategia ganadora si y sólo si n es par.

3. Considere la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida como

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Una *descomposición de Zeckendorf* de un entero positivo n es un conjunto finito $I \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ que no contiene dos índices consecutivos y satisface $n = \sum_{i \in I} F_i$.

El objetivo de este problema demostrar que todo entero positivo posee una única descomposición de Zeckendorf.

- a) Demuestre que, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$,

$$F_k + F_{k-2} + F_{k-4} + \cdots = F_{k+1} - 1,$$

donde la suma termina en F_2 si k es par y en F_3 si k es impar.

- b) Demuestre que, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, si $I \subseteq \{2, \dots, k\}$ es un conjunto finito que no contiene índices consecutivos, entonces

$$\sum_{i \in I} F_i \leq F_{k+1} - 1.$$

Indicación: le puede ser útil considerar los casos $k \in I$ y $k \notin I$.

- c) Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, existe $k \geq 2$ tal que $F_k \leq n < F_{k+1}$.
d) Demuestre la existencia de una descomposición de Zeckendorf para todo entero positivo n .
e) Demuestre la unicidad.