

2.4. Equivalencias inductivas y validez de la inducción ($\star$)

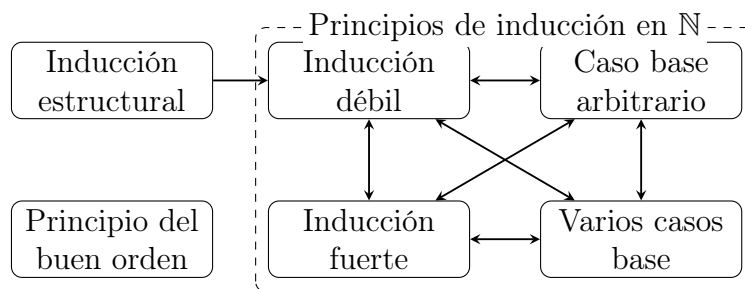
En esta sección discutiremos dos preguntas: ¿Cómo se relacionan los distintos principios de inducción que hemos visto? y ¿Por qué son válidos los principios de inducción?

2.4.1. Equivalencia de los principios inductivos

De la sección anterior hemos visto 6 principios de inducción: inducción estructural, débil, desde un caso base arbitrario, fuerte, fuerte con varios casos base y el principio del buen orden. Ya sabemos como se relacionan algunos de ellos:

- Deducimos el principio de inducción débil como un caso particular del principio de inducción estructural.
- Los principios desde un caso base arbitrario, fuerte, fuerte con varios casos base los obtuvimos *sobrecargando* la hipótesis inductiva del principio de inducción débil, por lo que son consecuencia de este último.
- De manera natural, el principio de inducción débil es un caso particular de los principios desde un caso base arbitrario, fuerte y fuerte con varios casos base.

Notemos que combinando los últimos dos puntos podemos deducir que los principios de inducción en los naturales son equivalentes entre sí. Es decir, hasta ahora conocemos las siguientes implicancias:



¿Cómo se relaciona el principio del buen orden con los principios de inducción? Veremos que el principio del buen orden se sigue del principio de inducción débil, y luego veremos que el principio de inducción estructural se sigue del principio del buen orden.

Lema. El principio de inducción débil implica el principio del buen orden.

Demostración. Supondremos que el principio de inducción débil es verdadero y probaremos el principio del buen orden.

Supongamos, en busca de una contradicción, que existe un conjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{N}$ sin elemento mínimo. Sea $P(n)$ la afirmación de que

$$S \cap \{0, 1, \dots, n\} = \emptyset.$$

- **Caso base:** $P(0)$ es verdadera. En efecto, $0 \notin S$, pues de lo contrario 0 sería el elemento mínimo de S .
- **Hipótesis inductiva:** $P(n)$ es verdadera.

- **Paso inductivo:** Por la hipótesis inductiva, ningún elemento de S es menor o igual que n . Si $n + 1 \in S$, entonces $n + 1$ sería el elemento mínimo de S , lo que no es posible. Por lo tanto, $n + 1 \notin S$ y $P(n + 1)$ es verdadera.

Por el principio de inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $S \neq \emptyset$, existe $s \in S$, pero $P(s)$ afirma que $S \cap \{0, 1, \dots, s\} = \emptyset$, lo que es una contradicción. $\square$

Lema. El principio del buen orden implica el principio de inducción estructural.

Demostración. Sea S un conjunto generado por objetos básicos B y un conjunto de reglas de producción $\mathcal{F}$. Supongamos que $P(s)$ es una propiedad que depende de un objeto $s \in S$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

(H1) $P(b)$ es verdadera para todo $b \in B$.

(H2) Para toda regla de producción $f \in \mathcal{F}$ de aridad r y para todos $s_1, \dots, s_r \in S$, si $P(s_i)$ es verdadera para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces $P(f(s_1, \dots, s_r))$ también es verdadera.

Queremos probar que $P(s)$ es verdadera para todo $s \in S$, pues esto es lo que afirma el principio de inducción estructural.

Supongamos, en busca de una contradicción, que existe un objeto $s \in S$ tal que $P(s)$ es falsa. Consideremos una producción $u_1, \dots, u_m = s$ de s . Consideremos el conjunto de contraejemplos a P en esta producción, es decir, el conjunto

$$C = \{i \in \{1, \dots, m\} : \neg P(u_i)\}.$$

Notemos que $C \subseteq \mathbb{N}$ y $C \neq \emptyset$ pues $m \in C$.

Por el principio del buen orden, C tiene un elemento mínimo i_0 . Notemos que u_{i_0} no es un objeto básico, pues de lo contrario (H1) implicaría que $P(u_{i_0})$ es verdadera, lo que contradice la definición de C . Por lo tanto, $u_{i_0} = f(u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$ para alguna regla de producción $f \in \mathcal{F}$ y algunos índices $j_1, \dots, j_k < i_0$. Por la minimalidad de i_0 , $P(u_{j_m})$ es verdadera para todo $m \in \{1, \dots, k\}$, y por (H2) $P(u_{i_0})$ también es verdadera, lo que contradice que $u_{i_0} \in C$.

Por lo tanto, concluimos que $P(s)$ es verdadera para todo $s \in S$, y que el principio de inducción estructural es válido. $\square$

Notemos que, combinando los lemas anteriores, podemos deducir que los seis principios de inducción que hemos visto son equivalentes entre sí.

Teorema. Los principios de inducción débil, desde un caso base arbitrario, fuerte, fuerte con varios casos base, estructural y el principio del buen orden son todos equivalentes entre sí.

2.4.2. Validez de los principios inductivos

Terminaremos nuestra discusión sobre los principios de inducción con una breve subsección sobre su validez. Una forma de ver la validez de los principios de inducción es pensando en el principio del buen orden como un axioma fundamental de los números naturales. Otra perspectiva, es tener una discusión fundacional sobre los números naturales, aunque esto requiera adentrarse en los axiomas estándares de la teoría de conjuntos.

Notemos que en nuestra exposición hemos asumido la noción de secuencia finita: hemos utilizado números naturales para indexar objetos en nuestra noción de producción. Esto ocurre incluso antes de nuestra definición recursiva de los números naturales. Es por esto, que una discusión sobre la validez de los principios inductivos va a requerir una definición formal de los números naturales.

Usaremos para ello la construcción estándar de los naturales en teoría de conjuntos, basada en el axioma del infinito. ¿Qué buscamos para poder definir los números naturales? Lo primero que necesitamos es un conjunto que contenga al 0 y sea cerrado bajo la operación de sucesor.

Definición. Un conjunto I se dirá *inductivo* si $0 \in I$ y, para todo $x \in I$, $\text{succ}(x) \in I$. Aquí $0 = \emptyset$ y $\text{succ}(x) = x \cup \{x\}$.

El siguiente axioma de la teoría estándar de conjuntos (ZFC) nos garantiza la existencia de un conjunto inductivo.

Axioma (del infinito). Existe un conjunto inductivo.

Si bien nos gustaría decir que este conjunto es precisamente el conjunto de los números naturales, esto no es del todo correcto. Lo que lograremos hacer es usar el axioma del infinito para construir un modelo de los números naturales que llamaremos ω .

Lema. Sea I el conjunto inductivo garantizado por el axioma del infinito. Existe un conjunto inductivo $\omega \subseteq I$ tal que, para todo conjunto inductivo $J \subseteq I$, tenemos que $\omega \subseteq J$.

Demostración. Sea ω la intersección de todos los conjuntos inductivos contenidos en I ; es decir,

$$\omega = \bigcap_{J \text{ es inductivo y } J \subseteq I} J.$$

Naturalmente $\omega \subseteq I$, veamos que es inductivo y minimal. Lo primero se sigue, pues $0 \in I$ para todo conjunto inductivo $J \subseteq I$, y si $x \in \omega$, entonces $x \in J$ para todo conjunto inductivo J , y por lo tanto $\text{succ}(x) \in J$ para todo conjunto inductivo $J \subseteq I$, de donde concluimos que $\text{succ}(x) \in \omega$. La minimalidad viene de que si $J \subseteq I$ es otro conjunto inductivo, entonces $\omega \subseteq J$ por definición de intersección. $\square$

El conjunto ω es precisamente la construcción estándar de los números naturales en la teoría de conjuntos. Una vez teniendo esta construcción formal, podemos demostrar el principio de inducción en ω y, por lo tanto, la validez de todos los principios de inducción.

Teorema. El principio de inducción es válido en ω .

Demostración. Queremos probar que, para toda propiedad $P(n)$ sobre ω , si $P(0)$ es verdadera y, para todo $n \in \omega$, $P(n)$ implica $P(\text{succ}(n))$, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \omega$. Sea S el conjunto de elementos de ω que satisfacen P , es decir,

$$S = \{s \in \omega : P(s)\} \subseteq \omega.$$

Queremos probar que $S = \omega$. Por hipótesis, $0 \in S$ y si $s \in S$, entonces $\text{succ}(s) \in S$, luego S es inductivo y por minimalidad de ω , $\omega \subseteq S$. Por lo tanto, $S = \omega$ y $P(n)$ es verdadera para todo $s \in \omega$. $\square$

Una vez construido ω , podemos formalizar la noción de producción finita usada anteriormente: la longitud de una producción está indexada por un elemento de ω .

Notando que $i < j$ en ω significa $i \in j$, podemos reformular la noción de producción de manera formal.

Definición (Producción). Sea $\mathcal{U}$ un dominio de objetos. Supongamos que tenemos:

- $B \subseteq \mathcal{U}$ *objetos base*,
- $\mathcal{F}$ *reglas de producción* donde cada $f \in \mathcal{F}$ es una función $f: \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{U}$ de alguna aridad $k > 0$.

Diremos que $u \in \mathcal{U}$ se *construye* a partir de B y $\mathcal{F}$ si existe un elemento $m \in \omega$ y $\{u_i\}_{i \in \text{succ}(m)}$ tal que $u_m = u$ y, para todo $i \in \text{succ}(m)$,

- $u_i \in B$,
- o bien $u_i = f(u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$, para alguna regla $f \in \mathcal{F}$ de aridad k e índices $j_1, \dots, j_k \in i$.

A los elementos $\{u_i\}_{i \in \text{succ}(m)}$ se les llama *producción* de u . El conjunto de todos los objetos que se construyen a partir de B y $\mathcal{F}$ se llama el *conjunto generado* por B y $\mathcal{F}$.

Una vez que los índices están formalizados en ω , podemos probar el principio de inducción estructural de manera formal via el buen orden de ω tal como lo hicimos en la sección anterior.