

2.5. Relaciones

2.5.1. Relaciones binarias y su representación

En lógica de primer orden introducimos *predicados* para describir propiedades y relaciones entre objetos. En esta sección trabajaremos con una especificación de los predicados, llamada *relación binaria*, que nos será útil para formalizar en lenguaje natural nociones de propiedades entre objetos. Esto aparecerá de manera natural en diversos contextos, como en bases de datos, grafos, sistemas de recomendación, especificación formal y teoría de computación, entre otros.

Definición. Una *relación (binaria)* R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$. Es decir, cada elemento de R es un par ordenado (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Si $(a, b) \in R$, escribiremos simplemente $a R b$. En otras palabras, $a R b$ es una manera abreviada de decir que a y b están relacionados por R .

Ejemplo. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, b)\}$$

es una relación binaria entre A y B . En este caso, se cumple que $1 R a$, $1 R b$ y $3 R b$, mientras que $2 R a$ y $2 R b$ no se cumplen. El hecho de que *no* se cumpla a menudo se denota escribiendo, por ejemplo, $2 \not R b$.

Cuando los conjuntos involucrados son finitos, una relación puede representarse simplemente listando sus pares, como vimos en el ejemplo anterior. Otra alternativa es via una *tabla*: ubicamos los elementos de A en las filas, los de B en las columnas, y marcamos aquellas posiciones correspondientes a pares que pertenecen a la relación.

Ejemplo. Por ejemplo, la relación del ejemplo anterior puede escribirse como:

R	a	b
1	✓	✓
2		
3		✓

Esta representación es particularmente útil cuando tratamos de decidir si un par (a, b) pertenece a la relación, ya que basta con ubicar la fila correspondiente a a y la columna correspondiente a b .

Otra representación gráfica involucra presentar los elementos de A y B como nodos en dos columnas y unirlos mediante una línea si y sólo si están relacionados. La definición formal requiere el lenguaje de grafos, que veremos más adelante, pero la idea es lo presentado anteriormente.

Definición. Sea $R \subseteq A \times B$ una relación binaria entre dos conjuntos. El *grafo bipartito* asociado a R es el grafo cuyos vértices se dividen en dos partes, una correspondiente a los elementos de A y la otra a los elementos de B , y en el que hay una arista entre $a \in A$ y $b \in B$ si y sólo si $a R b$.

Ejemplo.

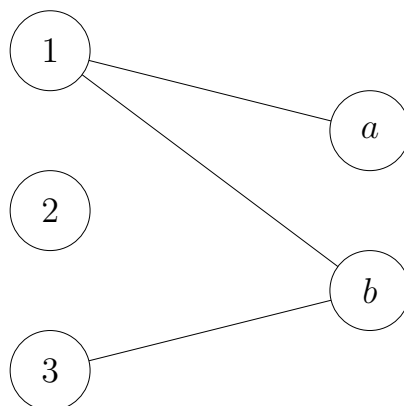


Figura 2.1: Representación de la relación del inicio $R \subseteq A \times B$ como grafo bipartito.

2.5.2. Relaciones binarias en un conjunto y su representación

El caso más usual de una relación será cuando una relación conecta elementos de un conjunto consigo mismo.

Ejemplo. Conocemos varios ejemplos naturales de relaciones binarias sobre un conjunto.

- La relación $\leq$ sobre $\mathbb{N}$ usada para comparar números.
- La relación de divisibilidad sobre $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, definida por $a \mid b$ si y sólo si a divide a b .
- La relación de “ser subconjunto” sobre 2^X para un conjunto X , definida por $A \subseteq B$ si y sólo si A es subconjunto de B .
- La relación de “ser ancestro de” sobre el conjunto de personas, definida por $a R b$ si y sólo si a es ancestro de b .
- La relación de “seguir a” sobre el conjunto de usuarios de una red social, definida por $a R b$ si y sólo si a sigue a b .
- La relación “hay vuelo directo” sobre el conjunto de aeropuertos, definida por $a R b$ si y sólo si hay un vuelo directo desde a hacia b .

Notemos que en este caso la relación puede representarse agregando un nodo por cada elemento del conjunto y dibujando una flecha desde a hacia b si y sólo si $a R b$. Nuevamente, la definición formal requiere el lenguaje de grafos, que será introducido más adelante, pero la idea es la presentada anteriormente.

Definición. Sea $R \subseteq A \times A$ una relación binaria sobre un conjunto A . El *dígrafo* asociado a R es el grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de A y en el que hay un arco dirigido desde a hacia b si y sólo si $a R b$.

Ejemplo. Consideremos un fragmento de una red social con cuatro usuarios: Alicia, Bob, Carla y Darío. Podemos definir la relación “sigue a” sobre este conjunto. Representemos esta relación mediante un dígrafo, como se muestra en la Figura 2.2.

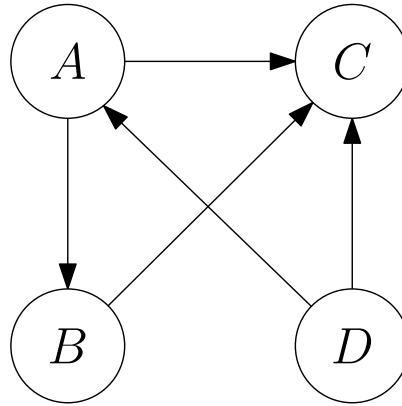


Figura 2.2: Representación de la relación x sigue a y en el conjunto {Alicia, Bob, Carla, Darío}.

Estas representaciones son especialmente útiles en ciencias de la computación. Por ejemplo, un grafo bipartito puede modelar usuarios y recursos, o estudiantes y cursos, mientras que un dígrafo puede modelar transiciones de estado, dependencias entre tareas o enlaces entre páginas web.

Las relaciones sobre un conjunto, tienen propiedades que nos permiten clasificarlas y estudiarlas de manera más sistemática.

Definición. Una relación binaria R sobre un conjunto A se dirá:

- *reflexiva* si $a R a$ para todo $a \in A$.
- *simétrica* si $a R b$ implica $b R a$ para todo $a, b \in A$.
- *antisimétrica* si $a R b$ y $b R a$ implican $a = b$ para todo $a, b \in A$.
- *transitiva* si $a R b$ y $b R c$ implican $a R c$ para todo $a, b, c \in A$.

Estas propiedades tienen una interpretación concreta en el dígrafo asociado a la relación. La reflexividad significa que cada vértice apunta hacia sí mismo. La simetría significa que cada vez que hay una flecha de a a b , también hay una flecha de b a a . La antisimetría significa que no puede haber flechas en ambos sentidos entre dos vértices distintos. Finalmente, la transitividad significa que siempre que haya un camino dirigido de largo 2 desde a hasta c , pasando por algún vértice intermedio b , entonces también debe existir la flecha directa de a hacia c .

Veamos algunos ejemplos de relaciones con estas propiedades.

Ejemplo. Consideremos las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$.

- Sea R_1 dada por $a R_1 b$ si y sólo si $a \leq b$. Esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es simétrica.
- Sea R_2 dada por $a R_2 b$ si y sólo si $a - b$ es par. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica. Más generalmente, la relación de congruencia módulo n es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica.
- Sea R_3 dada por $a R_3 b$ si y sólo si $a + b \leq 3$. Esta relación es simétrica, pero no es reflexiva ni transitiva.

2.5.3. Relación de orden

Las relaciones de orden nos permiten formalizar la idea de comparar elementos. Esto aparece, por ejemplo, cuando queremos hablar de precedencia entre tareas, inclusión entre conjuntos, divisibilidad o jerarquías entre objetos.

Definición. Una relación binaria R sobre un conjunto A es un *orden (parcial)* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si además para todo $a, b \in A$ se cumple que $a R b$ o $b R a$, entonces diremos que R es un *orden total*.

Ejemplo. Algunos ejemplos importantes de relaciones de orden son los siguientes.

- La relación $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{N}$.
- La relación $\subseteq$ es un orden parcial sobre 2^X para cualquier conjunto X . Si X tiene al menos dos elementos, entonces no es un orden total.
- La relación de divisibilidad sobre $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, definida por $a R b$ si y sólo si $a \mid b$, es un orden parcial. No es total, pues por ejemplo ni $2 \mid 3$ ni $3 \mid 2$.
- Si fijamos un alfabeto Σ con un orden total sobre sus símbolos, entonces el orden lexicográfico sobre Σ^* es un orden total. Este es el orden que se usa, por ejemplo, al ordenar palabras en un diccionario o strings en muchas estructuras de datos.
- La relación de prefijo sobre Σ^* , definida por $s R t$ si y sólo si s es prefijo de t , es un orden parcial. Es reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero no es total, ya que por ejemplo 01 y 10 no son prefijo uno del otro.

2.5.4. Relación de equivalencia

En muchas situaciones no queremos comparar elementos, sino agruparlos en clases de objetos que consideraremos “iguales” bajo cierto criterio. La noción que formaliza esta idea es la de relación de equivalencia.

Definición. Una relación binaria $R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo. Fijado un entero $p \geq 2$, podemos definir una relación sobre $\mathbb{Z}$ por

$$a \equiv b \pmod{p} \quad \text{si y sólo si} \quad p \mid (a - b).$$

Esta es una relación de equivalencia. Escribiremos también $a \equiv_p b$ para denotar que a y b están relacionados por esta relación.

Ejemplo. También aparecen relaciones de equivalencia de manera natural al trabajar con strings.

- Sobre Σ^* , la relación definida por $s R t$ si y sólo si $|s| = |t|$ es una relación de equivalencia. Sus clases de equivalencia agrupan strings según su largo.
- Sobre el conjunto de strings decimales que representan enteros no negativos, podemos definir $s R t$ si y sólo si s y t representan el mismo número al ignorar ceros a la izquierda. Por ejemplo, 0012, 012 y 12 quedan en la misma clase de equivalencia.

2.5.5. Clases de equivalencia

Una relación de equivalencia nos permite descomponer un conjunto en elementos equivalentes entre sí. Cada uno de estos bloques corresponde a una clase de equivalencia.

Definición. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A y un elemento $a \in A$, la *clase de equivalencia* de a es el conjunto

$$[a]_R = \{b \in A : a R b\}.$$

Es decir, la clase de equivalencia de un elemento a es el conjunto de todos los elementos que están relacionados con a .

Ejemplo. Consideremos la relación de congruencia módulo 3 sobre $\mathbb{Z}$. Sus clases de equivalencia son:

$$\begin{aligned} [0]_{\equiv_3} &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \\ [1]_{\equiv_3} &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \\ [2]_{\equiv_3} &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}. \end{aligned}$$

Notemos que distintos objetos pueden determinar la misma clase de equivalencia, por ejemplo $[1]_{\equiv_3} = [4]_{\equiv_3}$.

La proposición siguiente caracteriza cuándo dos representantes determinan la misma clase.

Proposición. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Para cualquier $a, b \in A$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- $a R b$.
- $[a]_R = [b]_R$.
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Demostración. Demostraremos las implicancias en ciclo.

(1 $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $a R b$. Veamos que $[a]_R \subseteq [b]_R$. Si $x \in [a]_R$, entonces $a R x$. Como $a R b$ y R es simétrica, tenemos $b R a$. Luego, por transitividad, de $b R a$ y $a R x$ se sigue que $b R x$. Por lo tanto, $x \in [b]_R$.

El mismo argumento, intercambiando los papeles de a y b , muestra que $[b]_R \subseteq [a]_R$. Concluimos que $[a]_R = [b]_R$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Si $[a]_R = [b]_R$, entonces en particular $a \in [a]_R$ por reflexividad. Como $[a]_R = [b]_R$, se tiene también $a \in [b]_R$. Por lo tanto, $a \in [a]_R \cap [b]_R$, y la intersección es no vacía.

(3 $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in A$ tal que $x \in [a]_R$ y $x \in [b]_R$. Esto significa que $a R x$ y $b R x$. Como R es simétrica, de $b R x$ obtenemos $x R b$. Luego, por transitividad, de $a R x$ y $x R b$ concluimos que $a R b$. $\square$

2.5.6. Particiones

Una partición de un conjunto universo corresponde a dividir sus elementos en conjuntos disjuntos que cubren todo el universo.

Definición. Una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de un conjunto A es una *partición* de A si:

- Para todo $P \in \mathcal{P}$, se tiene $P \neq \emptyset$.
- Para todo $P, Q \in \mathcal{P}$, si $P \neq Q$, entonces $P \cap Q = \emptyset$.
- Para todo $a \in A$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $a \in P$.

Las particiones aparecen naturalmente en las equivalencias: cada relación de equivalencia induce una partición cuyas partes son las clases de equivalencia.

Teorema. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A , el conjunto de clases de equivalencia $A/R = \{[a]_R : a \in A\}$ es una partición de A . Dicho conjunto se llama el *conjunto cociente* de A por R .

Demostración. Debemos verificar las tres propiedades de una partición.

- Cada clase es no vacía. En efecto, si $a \in A$, entonces $a R a$ por reflexividad, y por lo tanto $a \in [a]_R$.
- Dos clases cualesquiera son iguales o disjuntas. En efecto, si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, entonces por la proposición anterior se tiene $a R b$, y nuevamente por la misma proposición se concluye que $[a]_R = [b]_R$.
- La unión de todas las clases es A . En efecto, si $a \in A$, entonces $a \in [a]_R$, por lo que a pertenece a alguna clase de equivalencia.

Concluimos que $\{[a]_R : a \in A\}$ es una partición de A . □

Ejemplo. Por ejemplo, para la congruencia módulo 3 obtenemos:

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}.$$

De manera interesante, la recíproca también es cierta: cada partición de un conjunto induce una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son exactamente los bloques de la partición.

Teorema. Dada una partición $\mathcal{P}$ de un conjunto A , la relación $R_{\mathcal{P}}$ definida por

$$a R_{\mathcal{P}} b \quad \text{si y sólo si} \quad \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } a, b \in P$$

es una relación de equivalencia. Más aún, sus clases de equivalencia son exactamente los elementos de $\mathcal{P}$.

Demostración. Primero veremos que $R_{\mathcal{P}}$ es una relación de equivalencia.

- **Reflexividad.** Sea $a \in A$. Como $\mathcal{P}$ es una partición, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $a \in P$. Luego, $a R_{\mathcal{P}} a$.
- **Simetría.** Si $a R_{\mathcal{P}} b$, entonces existen $P \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in P$. Por lo tanto, también $b, a \in P$, y así $b R_{\mathcal{P}} a$.
- **Transitividad.** Supongamos que $a R_{\mathcal{P}} b$ y $b R_{\mathcal{P}} c$. Entonces existen $P, Q \in \mathcal{P}$ tales que $a, b \in P$ y $b, c \in Q$. Como $b \in P \cap Q$ y los elementos de una partición son disjuntos dos a dos, debe ser $P = Q$. En consecuencia, $a, c \in P$, y por lo tanto $a R_{\mathcal{P}} c$.

Veamos ahora que las clases de equivalencia de $R_{\mathcal{P}}$ son exactamente los elementos de $\mathcal{P}$. Sea $P \in \mathcal{P}$ y sea $a \in P$. Afirmamos que $[a]_{R_{\mathcal{P}}} = P$.

Si $x \in [a]_{R_{\mathcal{P}}}$, entonces $a R_{\mathcal{P}} x$, así que existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que $x, a \in Q$. Como también $a \in P$, tenemos $a \in P \cap Q$, luego $P = Q$. Por lo tanto, $x \in P$, y así $[a]_{R_{\mathcal{P}}} \subseteq P$.

Recíprocamente, si $x \in P$, entonces x y a pertenecen al mismo elemento de la partición, por lo que $a R_{\mathcal{P}} x$. En consecuencia, $x \in [a]_{R_{\mathcal{P}}}$, y obtenemos $P \subseteq [a]_{R_{\mathcal{P}}}$.

Concluimos que $[a]_{R_{\mathcal{P}}} = P$. □

Ejemplo. Consideremos el conjunto $\{0, 1\}^*$ de todos los strings binarios. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$L_n = \{w \in \{0, 1\}^* : |w| = n\}.$$

Entonces la familia

$$\mathcal{P} = \{L_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es una partición de $\{0, 1\}^*$: cada string tiene un largo bien definido, y dos strings con largos distintos no pueden pertenecer al mismo bloque.

La relación de equivalencia inducida por esta partición es, de manera natural, la relación

$$s R_{\mathcal{P}} t \quad \text{si y sólo si} \quad |s| = |t|.$$

En efecto, dos strings están relacionados exactamente cuando pertenecen al mismo bloque L_n , es decir, cuando tienen el mismo largo.

Por ejemplo, $\varepsilon \in L_0$, $0, 1 \in L_1$ and $00, 01, 10, 11 \in L_2$. Así, $01 R_{\mathcal{P}} 10$ porque ambos tienen largo 2, mientras que $1 \not R_{\mathcal{P}} 01$ porque sus largos son distintos. Las clases de equivalencia de $R_{\mathcal{P}}$ son precisamente los conjuntos L_n .

2.5.7. Relaciones de otras aridades

Hasta ahora hemos trabajado únicamente con relaciones binarias, es decir, relaciones entre pares de elementos. Sin embargo, muchas veces nos interesa relacionar tres o más objetos a la vez. Esto nos lleva a la noción general de relación k -aria.

Definición. Una *relación k -aria* entre conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. En caso que $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$, diremos que es una *relación k -aria sobre A* .

Ejemplo. Algunos ejemplos de relaciones de otras aridades son los siguientes.

- La propiedad de ser primo puede verse como una relación unaria sobre $\mathbb{N}$, dada por el conjunto de todos los números primos.
- La suma puede verse como una relación ternaria sobre $\mathbb{N}$, definida por

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a + b = c\}.$$

- En una base de datos, una tabla que registra triples de la forma (estudiante, curso, semestre) puede verse como una relación ternaria entre esos tres dominios.
- En procesamiento de strings, una relación ternaria puede modelar la concatenación:

$$C = \{(x, y, z) \in (\Sigma^*)^3 : xy = z\}.$$

Es decir, $(x, y, z) \in C$ cuando concatenar x con y produce exactamente el string z .

2.5.8. Funciones

Recordaremos por último, una clase particular de relaciones binarias: las funciones.

Definición. Una *función* $f : A \rightarrow B$ es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ con $(a, b) \in f$.

Definición. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y sea $a \in A$. Si $(a, b) \in f$, escribimos $f(a) = b$ y decimos que b es la *imagen* de a . En este caso, también diremos que a es una *preimagen* de b . El conjunto A se llama el *dominio* de f , y el conjunto

$$\{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$$

se llama la *imagen* de f .

2.5.9. Clasificación de funciones

Podemos clasificar las funciones según el tipo de correspondencia que establecen entre los elementos de su dominio y los de su codominio.

Definición. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es:

- *inyectiva* si para todos $a_1, a_2 \in A$, de $a_1 \neq a_2$ se sigue que $f(a_1) \neq f(a_2)$;
- *sobreyectiva* si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$;
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo. Algunos ejemplos típicos son los siguientes.

- La función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$ es inyectiva, pero no es sobreyectiva.
- La función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(0) = 0$, $g(n) = n - 1$, para $n > 0$ es sobreyectiva, pero no es inyectiva, pues $g(0) = g(1) = 0$.

2.5.10. Operaciones con funciones

Terminaremos esta sección con una operación natural entre funciones: la composición.

Definición. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones. La *composición* de f y g es la función $g \circ f : A \rightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces existe una función $f^{-1} : B \rightarrow A$ llamada la *inversa* de f , tal que

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{para todo } a \in A, \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad \text{para todo } b \in B.$$

Ejemplo. Sea $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $h(n) = n + 1$. Entonces h es biyectiva y su inversa es la función $h^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$h^{-1}(n) = n - 1.$$

Al componer funciones, las propiedades de inyectividad y sobreyectividad se conservan.

Proposición. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones.

- Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración. Demostremos ambas afirmaciones por separado.

- Supongamos que f y g son inyectivas. Si

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2),$$

entonces

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)).$$

Como g es inyectiva, se obtiene $f(a_1) = f(a_2)$. Como f también es inyectiva, concluimos que $a_1 = a_2$.

- Supongamos ahora que f y g son sobreyectivas. Sea $c \in C$. Como g es sobreyectiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Como f es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Entonces

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

Por lo tanto, $g \circ f$ es sobreyectiva. □

Ejercicios

1. En una plataforma de desarrollo de software consideremos los siguientes conjuntos:

- D : el conjunto de desarrolladores,
- M : el conjunto de módulos del sistema,
- T : el conjunto de tareas de compilación,
- S : el conjunto de archivos fuente.

Definimos las siguientes relaciones:

- Para $d \in D$ y $m \in M$, escribimos $d A m$ si el desarrollador d tiene permiso de escritura sobre el módulo m .
- Para $t_1, t_2 \in T$, escribimos $t_1 \preceq t_2$ si completar t_1 es prerequisite directo o indirecto para completar t_2 , o bien $t_1 = t_2$.
- Para $s_1, s_2 \in S$, escribimos $s_1 \sim s_2$ si al eliminar espacios en blanco y comentarios de ambos archivos, los resultados coinciden exactamente.

- a) Indique, para cada una de las tres relaciones, si se trata de una relación entre dos conjuntos distintos o de una relación sobre un solo conjunto.
- b) Para cada relación, indique cuál de las representaciones vistas en clases es la más natural: tabla, grafo bipartito o dígrafo. Justifique brevemente.
- c) Suponiendo que el sistema de compilación es consistente, ¿qué propiedades de relaciones esperaría que satisfaga $\preceq$? Concluya qué tipo de relación es.
- d) Explique por qué $\sim$ modela una noción de equivalencia entre archivos fuente y describa qué representan sus clases de equivalencia.

2. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas bien formadas sobre un conjunto de variables proposicionales. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{F}$ por

$$\phi \sim \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \phi \leftrightarrow \psi \text{ es una tautología.}$$

- a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia. ¿Quiénes son las clases de equivalencia de $\sim$?
- b) Definimos ahora una relación $\preceq$ sobre $\mathcal{F}/\sim$ por

$$[\phi]_{\sim} \preceq [\psi]_{\sim} \quad \text{si y sólo si} \quad (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \psi \text{ es una tautología.}$$

Demuestre que $\preceq$ está bien definida, es decir, que no depende de los representantes elegidos de cada clase de equivalencia.

- c) Demuestre que $\preceq$ es un orden sobre $\mathcal{F}/\sim$.
- d) ¿Es $\preceq$ un orden total? Justifique su respuesta.

3. Sea A un conjunto finito y $\preceq$ un orden en A . Decimos que x es un *predecesor inmediato* de y si $x \preceq y$, $x \neq y$, y no existe $z \in A$ tal que $x \preceq z \preceq y$ con $z \neq x, y$. El *diagrama de Hasse* de $(A, \preceq)$ es el grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de A y dónde hay un arco dirigido de x hacia y si y sólo si x es un predecesor inmediato de y .

- a) Demuestre que en cualquier conjunto finito parcialmente ordenado, la relación $\preceq$ puede recuperarse a partir del diagrama de Hasse: más precisamente, pruebe que $x \preceq y$ si y sólo si existe un camino dirigido de x a y en el diagrama de Hasse, o bien $x = y$.

Indicación: Un camino dirigido de x a y es una secuencia en A : $x = a_1, a_2, \dots, a_k = y$ con $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k$ en el diagrama de Hasse.

- b) ¿Puede un diagrama de Hasse contener ciclos dirigidos de largo $\ell \geq 2$? Justifique su respuesta.

Indicación: Un ciclo dirigido de largo ℓ es una secuencia en A : $a_1, \dots, a_\ell$ con $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_\ell \rightarrow a_1$ en el diagrama de Hasse.

Ejercicios adicionales

4. Definimos la relación $\approx$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por

$$(a, b) \approx (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a + d = b + c.$$

- a) Demuestre que $\approx$ es una relación de equivalencia.
 b) Demuestre que toda clase de equivalencia contiene al menos un elemento de la forma $(k, 0)$ o $(0, k)$ con $k \in \mathbb{N}$.
 c) Demuestre que ninguna clase de equivalencia puede contener dos elementos distintos de esa forma.
 d) ¿Qué representa el conjunto cociente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\approx$?
5. Sea S_n el conjunto de permutaciones de $\{1, \dots, n\}$; es decir, S_n son todos los strings en $\{1, \dots, n\}^*$ que contienen exactamente una vez cada símbolo $1, 2, \dots, n$. Para $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n \in S_n$, definimos su *conjunto de inversiones* por

$$\text{Inv}(\pi) = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n \text{ y } \pi_i > \pi_j\}.$$

Definimos una relación sobre S_n por

$$\pi \preceq \sigma \quad \text{si y sólo si} \quad \text{Inv}(\pi) \subseteq \text{Inv}(\sigma).$$

A esta relación se le llama el *orden débil* sobre S_n .

- c) Demuestre que el orden débil es efectivamente un orden parcial sobre S_n . ¿Es el orden débil un orden total?
 d) Dibuje el diagrama de Hasse de $(S_3, \preceq)$.
 e) Un *elemento minimal* de un orden parcial es un elemento x tal que no existe y con $y \prec x$. Un *elemento maximal* es un elemento x tal que no existe y con $x \prec y$. Determine cuántos elementos minimales y maximales tiene el orden débil sobre S_n .
 f) Sean x e y dos permutaciones de S_n tal que x es un predecesor inmediato de y . ¿Qué relación existe entre x e y ?