

2.6. Operaciones con relaciones

2.6.1. Operaciones de conjuntos

Una de las ventajas de pensar una relación como un subconjunto de un producto cartesiano es que podemos combinar relaciones y construir nuevas a partir de otras ya conocidas. Esto nos será útil para describir relaciones más complejas a partir de relaciones más simples.

Primero, partiremos con operaciones que las relaciones heredan de los conjuntos: unión, intersección y diferencia.

Definición (Operaciones clásicas). Sean $R, S \subseteq A \times B$ relaciones entre los conjuntos A y B . Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como el conjunto de pares que pertenecen a R , a S o a ambas;
- la *intersección* $R \cap S$ como el conjunto de pares que pertenecen simultáneamente a R y a S ;
- la *diferencia* $R \setminus S$ como el conjunto de pares que pertenecen a R pero no a S .

Ejemplo. Calculemos estas operaciones en una relación finita. Sean R y S las siguientes relaciones entre $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$:

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}, \quad S = \{(1, a), (2, b)\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} R \cup S &= \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}, \\ R \cap S &= \{(1, a)\}, \\ R \setminus S &= \{(2, a), (3, b)\}, \\ S \setminus R &= \{(2, b)\}. \end{aligned}$$

2.6.2. Inversión, composición y potencias

A parte de las operaciones de conjuntos, que nos permiten modelar cosas como “o” e “y” y “no”, existen otras operaciones que nos permiten modelar relaciones más complejas a partir de relaciones más simples.

Dos opciones naturales son la inversión y la composición de relaciones. La primera nos permite invertir la dirección de una relación, mientras que la segunda nos permite describir conexiones indirectas a través de una capa intermedia.

Definición. Sea $R \subseteq A \times B$ una relación. La *relación inversa* de R es

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

Si además $S \subseteq B \times C$ es otra relación, entonces la *composición* de R y S es la relación

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}.$$

Ejemplo. Consideremos los conjuntos

$$A = \{\text{Web}, \text{Móvil}\}, \quad B = \{\text{Auth}, \text{Pagos}\}, \quad C = \{\text{Usuarios}, \text{Transacciones}\}.$$

Sea $R \subseteq A \times B$ la relación “cliente usa servicio” dada por

$$R = \{(\text{Web}, \text{Auth}), (\text{Web}, \text{Pagos}), (\text{Móvil}, \text{Auth})\}$$

y sea $S \subseteq B \times C$ la relación “servicio usa base de datos” dada por

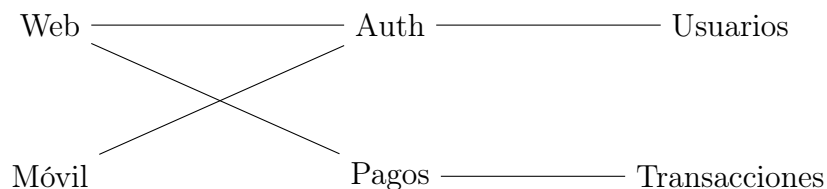
$$S = \{(\text{Auth}, \text{Usuarios}), (\text{Pagos}, \text{Transacciones})\}.$$

Naturalmente R^{-1} es la relación “servicio es usado por cliente” y S^{-1} es la relación “base de datos es usada por servicio”. Además, la composición $S \circ R$ es la relación “cliente termina usando base de datos” y está dada por

$$S \circ R = \{(\text{Web}, \text{Usuarios}), (\text{Web}, \text{Transacciones}), (\text{Móvil}, \text{Usuarios})\}.$$

Cuando una relación se representa mediante un grafo bipartito, la composición puede interpretarse como seguir una conexión del primer conjunto al segundo, y luego otra conexión del segundo conjunto a un tercer conjunto.

Ejemplo. La representación de R y S en el ejemplo anterior es la siguiente:



Podemos ver de esto que la composición $S \circ R$ conecta los nodos de la izquierda con los nodos de la derecha a través de los nodos del medio.

Cuando una relación se representa mediante un dígrafo, podemos hacer una interpretación similar: la composición de relaciones describe conexiones indirectas a través de un nodo intermedio. Es decir: si existe una flecha de a a b en R y una flecha de b a c en S , entonces aparece una conexión indirecta de a a c en $S \circ R$.

Potencias de una relación

Notemos que si la relación es sobre un mismo conjunto, es decir, si $R \subseteq A \times A$, entonces podemos componerla consigo misma.

Definición. Sea R una relación sobre un conjunto A y sea $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ la relación igualdad sobre A . Las potencias de R se definen recursivamente por

$$R^0 = \Delta_A, \quad R^{n+1} = R^n \circ R \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En el dígrafo asociado a una relación sobre A , la relación R^n describe los pares (a, b) para los cuales existe un camino dirigido de largo exactamente n desde a hasta b .

Ejemplo. Veamos cómo estas potencias registran cadenas de llamadas de largo fijo. Sea D la relación sobre

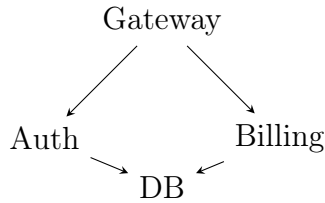
$$A = \{\text{Gateway}, \text{Auth}, \text{Billing}, \text{DB}\}$$

dada por

$$D = \{(\text{Gateway}, \text{Auth}), (\text{Gateway}, \text{Billing}), (\text{Auth}, \text{DB}), (\text{Billing}, \text{DB})\}.$$

Intuitivamente, D representa las llamadas directas entre microservicios en un software.

Gráficamente, la relación D se representa mediante el dígrafo



Luego D^2 significa que hay caminos de largo exactamente 2 entre los nodos, y en este caso $D^2 = \{(\text{Gateway}, \text{DB})\}$ pues desde **Gateway** se puede llegar a **DB** en exactamente dos pasos. En cambio $D^3 = \emptyset$ porque no hay manera de llegar a ningún nodo en exactamente tres pasos.

2.6.3. Clausuras

Otro tipo de operaciones a las que tendremos acceso son las *clausuras*. La idea tras las clausuras es, dada una relación R y una propiedad P , construir la relación más pequeña que contenga a R y que cumpla la propiedad P .

Definición. Sea R una relación sobre un conjunto A . La *clausura reflexiva* (resp. *simétrica*, *transitiva*, *reflexiva-transitiva*) de R es una relación T tal que:

- T es reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva);
- $R \subseteq T$;
- si T' es otra relación reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva) con $R \subseteq T'$, entonces $T \subseteq T'$.

En otras palabras, la clausura reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva) de R es la relación reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva) más pequeña que contiene a R .

Denotaremos las clausuras reflexiva, simétrica, transitiva y reflexiva-transitiva de R por R^{ref} , R^{sym} , R^+ y R^* , respectivamente.

Por ejemplo, la clausura reflexiva de una relación R sobre un conjunto A se obtiene agregando a R nuevos pares tal que la relación resultante sea reflexiva. En particular, debemos agregar todos los pares (a, a) para todo $a \in A$ que no estén ya en R . Notemos que esto nos da una forma de calcular la clausura reflexiva: basta con tomar la unión de R con la relación igualdad sobre A (o R^0).

De similar manera, podemos obtener las otras clausuras en terminos de operaciones de conjuntos y potencias de relaciones.

Teorema. Sea R una relación sobre un conjunto A . Entonces:

- la clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;
- la clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- la clausura transitiva de R está dada por

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n;$$

- la clausura reflexiva-transitiva de R se denota por R^* y está dada por

$$R^* = R^0 \cup R^+ = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Demostración. Verifiquemos cada afirmación.

- Debemos verificar que se cumplen las tres condiciones de la definición de clausura reflexiva.
 - $R \cup R^0$ es reflexiva pues para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in R^0 \subseteq R \cup R^0$.
 - $R \subseteq R \cup R^0$ se cumple por definición de unión.
 - Sea T una relación reflexiva con $R \subseteq T$. Como es reflexiva, $R^0 \subseteq T$, combinando esto con $R \subseteq T$ se obtiene $R \cup R^0 \subseteq T$.
- Para la clausura simétrica, procedemos de la misma manera.
 - $R \cup R^{-1}$ es simétrica pues si $(a, b) \in R \cup R^{-1}$, entonces $(b, a) \in R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$.
 - $R \subseteq R \cup R^{-1}$ se cumple por definición de unión.
 - Sea T una relación simétrica con $R \subseteq T$. Como es simétrica, $R^{-1} \subseteq T$, combinando esto con $R \subseteq T$ se obtiene $R \cup R^{-1} \subseteq T$.
- Nuevamente, verificamos las tres condiciones de la definición de clausura transitiva.
 - $\bigcup_{n \geq 1} R^n$ es transitiva pues si $(a, b) \in R^m$ y $(b, c) \in R^n$ para algunos $m, n \geq 1$, entonces $(a, c) \in R^{m+n}$, y por lo tanto $(a, c) \in \bigcup_{n \geq 1} R^n$.
 - $R \subseteq \bigcup_{n \geq 1} R^n$ se cumple porque $R = R^1$.
 - Sea T una relación transitiva con $R \subseteq T$. Mostremos por inducción que $R^n \subseteq T$ para todo $n \geq 1$. Para $n = 1$ se cumple $R^1 = R \subseteq T$ por hipótesis. Supongamos que $R^n \subseteq T$ para algún $n \geq 1$. Si $(a, b) \in R^{n+1} = R^n \circ R$, entonces existe $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R^n$. Por la hipótesis de que $R \subseteq T$, $(a, c) \in T$, y por la hipótesis de inducción, se tiene $(c, b) \in T$. Como T es transitiva, se concluye que $(a, b) \in T$. Por lo tanto, $R^{n+1} \subseteq T$. Por inducción, $R^n \subseteq T$ para todo $n \geq 1$, y así $\bigcup_{n \geq 1} R^n \subseteq T$.
- Finalmente, para la clausura reflexiva-transitiva, basta verificar que $R^0 \cup R^+$ cumple las tres condiciones de la definición de clausura reflexiva-transitiva.

- $R^0 \cup R^+$ es reflexiva pues contiene a $R^0 = \{(a, a) : a \in A\}$. Veamos que es transitiva, sean $(a, b), (b, c) \in R^0 \cup R^+$. Tenemos dos casos: si ambos pares pertenecen a R^+ , entonces $(a, c) \in R^+$ por transitividad de R^+ . Si uno de los pares pertenece a R^0 , entonces (a, c) pertenece a $R^0 \cup R^+$ pues $(a, c) = (a, b)$ o $(a, c) = (b, c)$. En cualquier caso, $(a, c) \in R^0 \cup R^+$, y por lo tanto $R^0 \cup R^+$ es transitiva.
- $R \subseteq R^0 \cup R^+$ se cumple porque $R = R^1 \subseteq R^+$.
- Sea T una relación reflexiva-transitiva con $R \subseteq T$. Como es reflexiva, $R^0 \subseteq T$, y como es transitiva, $R^+ \subseteq T$, por lo que $R^0 \cup R^+ \subseteq T$. $\square$

Ejemplo. Veamos cómo las clausuras interactúan con la noción de precedencia de tareas. Consideremos el conjunto de tareas

$$T = \{\text{Lexer}, \text{Parser}, \text{Checker}, \text{CodeGen}\}$$

y la relación P sobre T definida por

$$P = \{(\text{Lexer}, \text{Parser}), (\text{Parser}, \text{Checker}), (\text{Checker}, \text{CodeGen})\}.$$

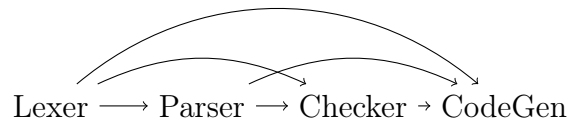
Supongamos que $x P y$ significa “ x debe completarse antes que y ” y que P contiene sólo las dependencias directas entre tareas. Notemos que P se ve como digrafo de la siguiente manera:

$$\text{Lexer} \longrightarrow \text{Parser} \longrightarrow \text{Checker} \rightarrow \text{CodeGen}$$

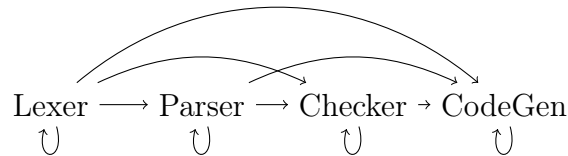
La clausura transitiva P^+ agrega además las dependencias indirectas:

$$(\text{Lexer}, \text{Checker}), \quad (\text{Parser}, \text{CodeGen}), \quad (\text{Lexer}, \text{CodeGen}).$$

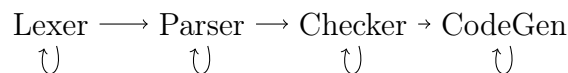
Es decir, es la relación que contiene todos los pares (x, y) tales que x debe completarse antes que y , ya sea de manera directa o indirecta. Como digrafo, P^+ se ve así:



Por otra parte, la clausura reflexiva-transitiva P^* agrega también los pares (x, x) , que representan el hecho de que toda tarea es alcanzable desde sí misma mediante un camino de largo 0.



Las otras dos clausuras, P^{ref} y P^{sym} , no son tan naturales en este contexto, pero P^{ref} agrega los pares (x, x) a P obteniendo



Mientras que P^{sym} agrega los pares (y, x) para cada par $(x, y) \in P$, obteniendo

$$\text{Lexer} \longleftrightarrow \text{Parser} \leftrightarrow \text{Checker} \nleftrightarrow \text{CodeGen}$$

Cuando el conjunto es finito, no es necesario considerar potencias arbitrariamente grandes para obtener la clausura transitiva.

Proposición. Sea R una relación sobre un conjunto finito A con n elementos. Entonces

$$R^+ = \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i.$$

De manera similar, la clausura reflexiva-transitiva de R se puede escribir como

$$R^* = \bigcup_{0 \leq i \leq n} R^i.$$

Demostración. Probemos el resultado para la clausura transitiva; el caso de la clausura reflexiva-transitiva se sigue de manera análoga.

La inclusión $\bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i \subseteq R^+$ se sigue de que $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$.

Para la otra inclusión, supongamos que $(a, b) \in R^+$. Entonces existe un camino dirigido desde a hasta b siguiendo flechas de R , de modo que $(a, b) \in R^m$ para algún $m \geq 1$.

Si $a \neq b$, podemos eliminar de este camino cualquier tramo cerrado comprendido entre dos apariciones de un mismo vértice hasta obtener un camino sin vértices repetidos, cuyo largo es a lo más $n - 1$. Si $a = b$, escogemos un camino cerrado no vacío de largo mínimo; este no puede repetir internamente un vértice, pues podríamos acortarlo, y por lo tanto es un ciclo de largo a lo más n . En ambos casos existe un camino de largo i desde a hasta b para algún i con $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $(a, b) \in R^i$ para algún i con $1 \leq i \leq n$, y así $(a, b) \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i$. Concluimos que $R^+ \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i$ como buscábamos.

Para la clausura reflexiva-transitiva, basta notar que $R^* = R^0 \cup R^+$ y aplicar la proposición anterior. $\square$

Ejercicios

1. En una arquitectura de microservicios consideremos el conjunto

$$S = \{\text{Gateway}, \text{Auth}, \text{Orders}, \text{Billing}, \text{DB}\}.$$

Definimos una relación D sobre S por

$$x D y \quad \text{si y sólo si} \quad x \text{ llama directamente a } y.$$

Suponga que

$$D = \{(\text{Gateway}, \text{Auth}), (\text{Gateway}, \text{Orders}), (\text{Orders}, \text{Billing}), (\text{Auth}, \text{DB}), (\text{Billing}, \text{DB})\}.$$

- a) ¿Cuál es la representación vista en clases más natural para esta relación: tabla, grafo bipartito o dígrafo? Justifique brevemente.

- b) Calcule D^2 e interprete el significado de cada par que aparece en esa relación.
- c) Describa en palabras qué modela la clausura transitiva D^+ .
- d) Determine qué pares deben agregarse a D para obtener D^+ .
- e) Explique qué información adicional agrega la clausura reflexiva-transitiva D^* con respecto a D^+ .

2. Sea R una relación sobre un conjunto A . Diremos que la *clausura de equivalencia* de R es la menor relación de equivalencia sobre A que contiene a R .¹

- a) Sea S una relación simétrica sobre A . Demuestre que S^* es una relación de equivalencia.
- b) Concluya que $(R^{\text{sym}})^*$ es una relación de equivalencia que contiene a R .
- c) Sea E una relación de equivalencia sobre A tal que $R \subseteq E$. Demuestre que $(R^{\text{sym}})^* \subseteq E$.
- d) Concluya que la clausura de equivalencia de R es $R^{\text{eq}} = (R^{\text{sym}})^*$.
- e) Demuestre que $a R^{\text{eq}} b$ si y sólo si existen elementos

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$$

para algún $n \geq 0$, tales que para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ se cumple que $a_i R a_{i+1}$ o $a_{i+1} R a_i$.

- f) En el caso finito, interprete esta caracterización de la clausura de equivalencia en términos de dígrafos y describa las clases de equivalencia de R^{eq} en términos de caminos no dirigidos en el dígrafo asociado a R .

3. Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y sea R una relación sobre A . La *matriz de adyacencia* de R es la matriz binaria $M_R = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ definida por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i R j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $M = (m_{ij})$ y $N = (n_{ij})$ son matrices binarias de tamaño $n \times n$, definimos su *producto booleano* $M \odot N = P = (p_{ij})$ por

$$p_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (m_{ik} \wedge n_{kj}).$$

- a) Demuestre que si S es otra relación sobre A , entonces $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$.
- b) Defina recursivamente las potencias booleanas de una matriz por

$$M_R^{\odot 1} = M_R, \quad M_R^{\odot(t+1)} = M_R \odot M_R^{\odot t}.$$

Demuestre que $M_{R^t} = M_R^{\odot t}$ para todo $t \geq 1$.

- c) Explique qué significa que la entrada (i, j) de $M_R^{\odot t}$ sea igual a 1.
- d) Describa, en términos de matrices booleanas, una matriz que represente la clausura transitiva R^+ .

¹Como en las otras clausuras esto significa que la clausura de equivalencia de R es una relación de equivalencia E tal que $R \subseteq E$, y si E' es otra relación de equivalencia con $R \subseteq E'$, entonces $E \subseteq E'$.

Ejercicios adicionales

4. Sea X un conjunto arbitrario y considere la familia de relaciones de equivalencia $\{E_1, \dots, E_n\}$ sobre X para $n > 1$ entero. Se define la relación $E \subseteq X \times X$ como sigue:

$$x E y \leftrightarrow \exists i, i \in \{1, \dots, n\} \wedge x E_i y$$

- a) ¿Es E reflexiva? Demuestre o refute.
- b) ¿Es E simétrica? Demuestre o refute.
- c) ¿Es E transitiva? Demuestre o refute.
- d) Suponga ahora que $X = \{0, 1\}^n$ son los *strings* de largo n sobre el alfabeto $\{0, 1\}$. Además, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, consideramos la relación de equivalencia E_i sobre X como:

$$x E_i y \leftrightarrow x \text{ e } y \text{ son iguales en el } i\text{-ésimo carácter (leído de izquierda a derecha)}.$$

Por ejemplo, para $n = 3$, $w = 011$ y $w' = 000$ son únicamente iguales en el primer carácter. Sea E^+ la clausura transitiva de E . Se sabe que E^+ es una relación de equivalencia (no lo demuestre). ¿Cuántas clases de equivalencia tiene E^+ ? Justifique su respuesta.