

### 3.1. Principio multiplicativo y problemas de conteo

Frecuentemente nos enfrentamos a preguntas de conteo en ciencias de la computación y las preguntas de conteo son las motivación tradicional de la combinatoria una de las áreas centrales de la matemática discreta. Un ejemplo clásico es el conteo de objetos discretos: strings con ciertas propiedades, subconjuntos que verifiquen ciertas condiciones, entre otros. Incluso, muchas veces al analizar el rendimiento de un algoritmo, necesitamos ser capaces de contar o estimar la cantidad de pasos que el algoritmo ejecuta.

Atacaremos dicho tipo de preguntas mediante principios y técnicas de conteo. En esta sección estudiaremos la herramienta más básica: el principio multiplicativo. Con dicho principio, podremos contar objetos que se construyen secuencialmente, y que pueden ser representados como listas, permutaciones, subconjuntos o multiconjuntos.

#### 3.1.1. Principio multiplicativo

La idea tras el principio multiplicativo es bastante natural: si una decisión se toma en varias etapas, el número total de resultados se obtiene multiplicando la cantidad de opciones disponibles en cada etapa.

**Principio.** Supongamos que un procedimiento consta de  $k \geq 1$  tareas sucesivas  $T_1, \dots, T_k$ . Si

- la tarea  $T_1$  puede realizarse de  $n_1$  maneras,
- Para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ , una vez fijas las tareas  $T_1, \dots, T_{i-1}$  la tarea  $T_i$  puede realizarse de  $n_i$  maneras.

Entonces, el procedimiento puede realizarse de  $n_1 \dots n_k$  formas.

*Demostración.* Mostraremos el principio multiplicativo por inducción sobre  $k$ . Para una tarea, la cantidad es  $n_1$ . Supongamos que las primeras  $k-1$  tareas pueden completarse de  $n_1 \dots n_{k-1}$  maneras. Para cada una de ellas hay exactamente  $n_k$  maneras de realizar la última tarea. Tenemos, por tanto,  $n_1 \dots n_{k-1}$  grupos de  $n_k$  procedimientos completos, lo que da  $n_1 \dots n_k$  en total.  $\square$

Usualmente usaremos el principio para contar objetos combinatoriales que se construyen paso a paso de manera secuencial.

El principio multiplicativo se puede reformular (de manera equivalente) en términos de productos cartesianos.

**Principio.** Si  $A_1, \dots, A_k$  son conjuntos finitos. Entonces,

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \dots |A_k|.$$

*Demostración.* Formar un elemento de  $A_1 \times \dots \times A_k$  equivale a elegir una  $k$ -upla  $(a_1, \dots, a_k)$  con  $a_i \in A_i$  para todo  $i$ . La primera coordenada puede elegirse de  $|A_1|$  maneras, la segunda de  $|A_2|$  maneras, y así sucesivamente. Aplicando la regla del producto, obtenemos

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k|.$$

$\square$

### 3.1.2. Objetos con orden: Listas y Permutaciones

Comenzamos con estructuras donde el orden sí importa. La estructura más básica será una lista: una secuencia de elementos elegidos de un conjunto finito.

#### Listas

Comenzaremos con un ejemplo de lista: los bytes, que son secuencias de 8 bits.

**Ejemplo.** ¿Cuántos bytes hay? Un byte está formado por 8 bits donde dicho orden importa. Ejemplos de bytes distintos son 00000000, 11111111, 10101010 y 11001100.

Para cada posición del byte hay 2 opciones: 0 o 1. Por el principio multiplicativo hay  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$  bytes posibles.

Exactamente el mismo razonamiento sirve para contar listas de largo  $k$  sobre un conjunto de  $n$  elementos.

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto finito. Una *lista (ordenada)* de  $X$  de largo  $k$  es una secuencia de  $k$  elementos  $x_1, \dots, x_k$  con  $x_i \in X$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Notemos que estas listas también se pueden interpretar como strings de largo  $k$  sobre el alfabeto  $X$ . Para contarlas, repetimos el argumento de los bytes: cada posición admite cualquiera de los elementos del conjunto, con independencia de lo elegido en las otras posiciones.

**Teorema.** El número de listas de largo  $k$  de un conjunto de  $n$  elementos es  $n^k$ .

Tomaremos la convención de que  $0^0 = 1$ , de modo que hay una única lista de largo 0 (la lista vacía).

*Demostración.* Si  $k = 0$ , existe una única lista, la lista vacía, y su cantidad es  $n^0 = 1$ .

Supongamos ahora que  $k \geq 1$ . Cada una de las  $k$  posiciones puede llenarse con cualquiera de los  $n$  elementos disponibles. Por la regla del producto, el número total de listas es

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ veces}} = n^k. \quad \square$$

**Ejemplo.** Las patentes de vehículos en Chile tienen la forma  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4d_1d_2$ , donde  $\alpha_i$  son letras mayúsculas y  $d_j$  son dígitos. Las letras mayúsculas permitidas son 18 (se excluyen las vocales y las letras M, N, Ñ, Q), y los dígitos son 10. Tenemos entonces una lista de letras de largo 4 seguida de una lista de dígitos de largo 2. Por lo tanto, el número de patentes posibles es

$$18^4 \cdot 10^2 = 10.497.600.$$

**Ejemplo.** Contemos cuántos números naturales de  $n$  dígitos son pares. Supongamos primero que  $n \geq 2$ . El primer dígito tiene 9 opciones, pues no puede ser 0. Cada uno de los  $n - 2$  dígitos intermedios tiene 10 opciones (o es una lista de largo  $n - 2$  sobre el conjunto de dígitos). El último dígito debe ser par, así que tiene 5 opciones: 0, 2, 4, 6, 8. Por lo tanto, el número total es

$$9 \cdot 10^{n-2} \cdot 5 = 45 \cdot 10^{n-2}.$$

Para  $n = 1$ , los naturales pares de un dígito son 0, 2, 4, 6, 8, de modo que hay 5.

**Ejemplo.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos finitos, con  $|A| = a$  y  $|B| = b$ . Fijemos un orden de los elementos de  $A$ . Una función  $f: A \rightarrow B$  queda determinada por la lista de sus imágenes en ese orden. Cada una de las  $a$  imágenes puede elegirse de  $b$  maneras, por lo que hay  $b^a$  funciones. Si  $A = \emptyset$ , existe una única función, incluida la función de  $\emptyset$  en  $\emptyset$ ; si  $A \neq \emptyset$  y  $B = \emptyset$ , no existe ninguna.

## Permutaciones

Consideraremos ahora listas con restricciones sobre sus elementos. La primera restricción a considerar es que los objetos aparezcan exactamente una vez.

**Ejemplo.** 7 personas esperan atención médica. ¿Cuántos órdenes distintos hay para atenderlos? Para elegir a quién atender primero tenemos 7 posibilidades. Una vez fijada esa persona, quedan 6 posibilidades para la segunda, luego 5 para la tercera, y así sucesivamente hasta la última persona. Cada secuencia de elecciones determina un único orden de atención, y el principio multiplicativo da

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$

órdenes distintos.

Podemos generalizar estas construcciones a conjuntos finitos de  $n$  elementos.

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto finito. Una *permutación* de  $X$  es una lista ordenada que contiene todos los elementos de  $X$  **exactamente** una vez.

Para  $n \in \mathbb{N}$ , definimos el *factorial*  $n!$  como el número de permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos. En particular,  $0! = 1$ , pues el conjunto vacío tiene una única permutación: la lista vacía.

Podremos usar el razonamiento de las siete personas para contar permutaciones de cualquier conjunto finito.

**Teorema.** El número de permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos es

$$n! = \prod_{i=1}^n i = n \cdot \dots \cdot 1 \quad (n \geq 1).$$

*Demostración.* Para formar una permutación de un conjunto de  $n$  elementos, el primer lugar puede elegirse de  $n$  maneras, el segundo de  $n - 1$  maneras, y así sucesivamente, hasta llegar a 1 manera para el último lugar. Por la regla del producto,

$$n! = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1. \quad \square$$

Veamos algunos ejemplos que combinen las elecciones de objetos.

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas se pueden ordenar  $n$  libros distintos en un estante si cada uno puede colocarse derecho o invertido? Supongamos que las dos orientaciones de cada libro son distinguibles. Primero elegimos el orden de los libros, de  $n!$  maneras. Después elegimos una de dos orientaciones para cada uno, de  $2^n$  maneras. Por el principio multiplicativo, el número de disposiciones es  $n!2^n$ .

## $k$ -permutaciones

Las permutaciones *deben* usar cada objeto exactamente una vez. Sin embargo, en muchos problemas, sólo queremos una lista ordenada de largo  $k$  con elementos distintos.

**Ejemplo.** Un reproductor tiene 12 canciones y queremos armar una lista de reproducción de largo 4 sin repetir canciones. ¿Cuántas playlists hay? Elegimos la primera canción de 12 maneras, la segunda de las 11 restantes, la tercera de 10 y la cuarta de 9. Como el orden importa, cada lista queda determinada por esas cuatro elecciones. La cantidad posible es  $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11.880$ .

Dichos ejemplos nos llevan a la noción de  $k$ -permutación: una lista de largo  $k$  con elementos distintos de un conjunto finito.

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto finito. Una  $k$ -permutación de  $X$  es una lista de largo  $k$  donde cada elemento aparece a lo más una vez.

Definimos  $(n)_k$  como la *cantidad de  $k$ -permutaciones* de un conjunto de  $n$  elementos. Nuevamente  $(n)_0 = 1$ , pues hay una única lista vacía. Podemos generalizar nuestro conteo de las playlists para obtener una fórmula para  $(n)_k$ .

**Teorema.** El número de  $k$ -permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos es

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n).$$

*Demostración.* Para formar una lista ordenada de largo  $k$ , el primer lugar puede elegirse de  $n$  maneras. Una vez elegido, el segundo puede elegirse de  $n - 1$  maneras. Continuando así, el lugar número  $k$  puede elegirse de  $n - k + 1$  maneras. Por la regla del producto,

$$(n)_k = n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

La identidad con factoriales se obtiene reescribiendo este producto como  $\frac{n!}{(n-k)!}$ . □

Veamos algunas aplicaciones de este conteo.

**Ejemplo.** Consideremos los dígitos impares  $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ . Queremos formar números de tres dígitos sin repetición, así que estamos contando permutaciones ordenadas de largo 3 tomadas de un conjunto de 5 elementos. Entonces la cantidad buscada es  $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

Podemos combinar nuevamente los distintos conteos de objetos para resolver problemas más complejos.

**Ejemplo.** Hay  $n$  ciudades interesantes en Chile. Usted quiere visitar  $k$  de ellas en algún orden y en cada una hacer una de las  $q$  actividades interesantes disponibles. Suponemos que no se repiten ciudades, que  $0 \leq k \leq n$  y que  $q \geq 1$ . El itinerario es una  $k$ -permutación, por lo que hay  $(n)_k$  itinerarios. Para cada itinerario hay  $q^k$  elecciones de actividades, aunque las actividades disponibles sean distintas en cada ciudad. El total es  $(n)_k q^k = \frac{n!}{(n-k)!} q^k$  itinerarios con actividades.

## Multipermutaciones

Nos moveremos ahora a un contexto bastante general: listas de largo fijo donde la cantidad de cada elemento está prescrita.

**Ejemplo.** Contemos cuántos anagramas distintos tiene la palabra **BANANA**. Un anagrama de **BANANA** es una lista de largo 6 con tres letras  $A$ , dos letras  $N$  y una letra  $B$ .

Si consideráramos todas las letras distintas, habría  $6!$  ordenamientos. Podemos distinguirlas etiquetando sus copias como  $B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3$ . Al borrar los subíndices, varios de esos ordenamientos nos darán el mismo anagrama. Esto es un *sobreconteo*: hemos contado varias veces el mismo objeto. Una vez hecho esto, contemos cuántas veces se repite cada anagrama. Al haber tres letras  $A$  indistinguibles y dos letras  $N$  indistinguibles, tenemos que cada anagrama se cuenta  $3!2!$  veces en ese total.

En efecto, si  $M$  es el número de anagramas válidos de **BANANA**, entonces podemos contar las permutaciones etiquetadas de  $B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3$  de dos maneras: Primero, contando todas las permutaciones de esas seis letras distintas, obtenemos  $6!$ . Segundo, podemos elegir un anagrama de  $M$  formas y luego ordenar sus copias de  $A$  y  $N$  de  $3!2!$  maneras. Por el principio multiplicativo, tenemos que

$$6! = M \cdot 3! \cdot 2!.$$

Despejando, concluimos que **BANANA** tiene  $M = \frac{6!}{3!2!} = 60$  anagramas distintos.

Este mismo razonamiento nos lleva a analizar listas de largo fijo con multiplicidades prescritas.

**Definición.** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  un conjunto finito y  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ . Una  *$\vec{a}$ -multipermutación* de  $X$  es una lista ordenada que contiene el objeto  $x_i$  *exactamente*  $a_i$  veces.

Notemos que el largo de una  $\vec{a}$ -multipermutación es la suma de las multiplicidades:  $n = \sum_{i=1}^k a_i$ . El argumento de los anagramas de **BANANA** se repite para cualquier lista de multiplicidades: etiquetamos las copias del símbolo  $x_i$  y corregimos el factor  $a_i!$  que introducen. Así podemos definir el *coeficiente multinomial*  $\binom{n}{a_1, \dots, a_k}$  como la cantidad de  $\vec{a}$ -multipermutaciones de un conjunto de  $k$  elementos y contarlos vía sobreconteo.

**Teorema.** Sea  $\vec{a} \in \mathbb{N}^k$  y  $n = \sum_{i=1}^k a_i$ , con  $k \geq 1$ . El número de  $\vec{a}$ -multipermutaciones de un conjunto de  $k$  elementos es

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}.$$

*Demostración.* Etiquetemos las  $a_i$  copias de cada símbolo  $x_i$  para distinguirlas. Ahora tenemos  $n$  objetos distintos, que pueden ordenarse de  $n!$  maneras. También podemos formar uno de estos ordenamientos eligiendo primero una multipermutación y luego asignando las etiquetas a sus copias. Para cada  $i$ , las  $a_i$  etiquetas pueden asignarse a las posiciones de  $x_i$  de  $a_i!$  maneras. Por el principio multiplicativo, si  $M$  es el número de multipermutaciones, entonces

$$n! = M \cdot a_1! a_2! \cdots a_k!.$$

Despejando  $M$  en la igualdad, concluimos lo pedido.  $\square$

Veamos algunas aplicaciones de este conteo.

**Ejemplo.** Sea  $0 \leq r \leq n$ . Contemos los strings binarios de largo  $n$  con  $r$  unos. Luego, estos tienen exactamente  $n - r$  ceros, así que estamos contando  $(r, n - r)$ -multipermutaciones de  $\{1, 0\}$ . Por tanto, hay

$$\binom{n}{r, n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

strings de este tipo.

Combinaremos también estos objetos con técnicas anteriores.

**Ejemplo.** Queremos sacar una foto de un curso: son  $n$  estudiantes y les repartimos  $r$  gorros rojos,  $s$  azules y  $t$  verdes con  $r + s + t = n$ . ¿Cuántas posibles fotos hay? Suponemos que los gorros de un mismo color son indistinguibles. Los estudiantes se disponen en una fila y distinguimos las fotos tanto por el orden de los estudiantes como por el color que lleva cada uno. Elegimos primero el orden de los estudiantes, de  $n!$  maneras. Para cada orden, la lista de colores es una  $(r, s, t)$ -multipermutación, de modo que el número de fotos es

$$n! \cdot \binom{n}{r, s, t} = \frac{(n!)^2}{r!s!t!}.$$

### 3.1.3. Objetos sin orden: Conjuntos

Hasta aquí el orden era esencial: cambiar la posición de los elementos cambiaba el resultado. Ahora pasamos al caso en que sólo importa qué elementos se eligen.

#### Subconjuntos

Partiremos contando elecciones sin repetición.

**Ejemplo.** En el Loto se eligen 6 números distintos entre 1 y 41. ¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer? Si anotamos los seis números en orden, hay

$$(41)_6 = 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36$$

listas posibles. Sin embargo, nuevamente hemos *sobrecontado*: el orden de los seis números no importa, así que cada apuesta se cuenta  $6!$  veces. Por lo tanto, hemos sobrecontado todas las apuestas por el mismo factor, y su cantidad es

$$\frac{(41)_6}{6!} = \frac{41!}{6!35!} = 4.496.388.$$

Otra forma de razonar es ver la apuesta como una lista de largo 41 con 6 unos y 35 ceros: acá cada uno corresponde a seleccionar el número de la posición correspondiente y cada cero a no seleccionarlo. En este caso, tenemos una  $(6, 35)$ -multipermutación de  $\{1, 0\}$ , y el número de apuestas es

$$\binom{41}{6, 35} = \frac{41!}{6!35!} = 4.496.388.$$

Notemos que las apuestas anteriores son simplemente subconjuntos de tamaño 6 del conjunto  $\{1, \dots, 41\}$ . Podemos generalizar esto para obtener la siguiente definición.

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto finito. Los  $k$ -conjuntos de  $X$  son los subconjuntos de  $X$  de tamaño  $k$ .

Estos objetos también se conocen como  $k$ -combinaciones sobre  $X$ . Definimos el *coeficiente binomial*  $\binom{n}{k}$  como la cantidad de  $k$ -combinaciones de un conjunto de  $n$  elementos. Repitiendo cualquiera de los argumentos del loto, obtenemos la siguiente fórmula para  $\binom{n}{k}$ .

**Teorema.** El número de  $k$ -conjuntos de un conjunto de  $n$  elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k, n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

*Demostración.* Si  $k = 0$ , ambos lados valen 1. Supongamos ahora que  $k \geq 1$ . Toda  $k$ -combinación puede ordenarse de  $k!$  maneras distintas, y toda  $k$ -permutación proviene de una única  $k$ -combinación junto con uno de esos órdenes. Por lo tanto,  $(n)_k = \binom{n}{k} k!$ . Usando el conteo de  $k$ -permutaciones,

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \square$$

Veamos un par de aplicaciones de este conteo.

**Ejemplo.** El número de strings binarios de largo  $n$  con exactamente  $r$  unos es  $\binom{n}{r}$ , porque basta elegir las  $r$  posiciones donde irán los unos; una vez elegidas, los ceros van en las posiciones restantes (de exactamente una manera).

**Ejemplo.** Volvamos a los anagramas de BANANA. Elegimos las tres posiciones de las letras  $A$  entre las seis disponibles, y luego las dos posiciones de las letras  $N$  entre las tres restantes, luego de esto hay sólo una posición para la letra  $B$ . Por el principio multiplicativo, el número de anagramas es

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 = 20 \cdot 3 = 60.$$

Nuevamente, podemos combinar estos objetos con técnicas anteriores para resolver problemas más complejos.

**Ejemplo.** De  $n$  personas se eligen  $k$  para un comité con presidente y vicepresidente. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto? Supongamos que  $2 \leq k \leq n$  y que los cargos deben ocuparlos personas distintas. Hay  $\binom{n}{k}$  comités; dentro de cada comité hay  $k$  opciones para presidente y  $k-1$  para vicepresidente. Por lo tanto, hay

$$\binom{n}{k} k(k-1)$$

comités con ambos cargos asignados.

## Multiconjuntos

Discutiremos por último el caso de elecciones sin orden pero con repeticiones.

**Ejemplo.** ¿Qué pasa si podemos repetir números en el loto? En esta variante hipotética elegimos seis números entre 1 y 41, permitiendo repeticiones y sin distinguir el orden de elección. Dividir el

número de listas por  $6!$  ya no nos sirve: una apuesta con seis números distintos tiene  $6!$  órdenes, pero una apuesta que repite seis veces el mismo número tiene sólo un orden. Es decir, el sobreconteo depende de la elección de los números y no podemos corregirlo con un solo factor.

Para solucionar este problema describiremos una apuesta por las cantidades  $a_1, \dots, a_{41}$ , donde  $a_i \geq 0$  es el número de veces que elegimos el número  $i$ . Notemos que estas deben satisfacer

$$a_1 + \dots + a_{41} = 6.$$

Usaremos el método de *barras y estrellas* para contar las soluciones de esta ecuación. Las barras separan cuarenta y un grupos, uno por cada número: antes de la primera barra escribimos  $a_1$  estrellas, entre las dos primeras  $a_2$ , y así sucesivamente. Por ejemplo, si tuviéramos que representar cuatro grupos con 2, 1, 0, 3 estrellas, la secuencia de estrellas y barras sería

$$\star\star \mid \star \mid \mid \star\star\star$$

Volvamos a nuestro problema: en este caso tenemos 41 grupos y 6 pelotas, así que necesitamos 40 barras y 6 estrellas. Por eso basta elegir las seis posiciones de las estrellas entre las  $6 + 40 = 46$  posiciones de la secuencia. La cantidad de apuestas distintas es

$$\binom{46}{6} = 9.366.819.$$

Este mismo razonamiento nos lleva a la noción de multiconjunto: un “subconjunto” donde los elementos pueden repetirse.

**Definición.** Sea  $X$  un conjunto finito. Los  *$k$ -multiconjuntos* de  $X$  son “subconjuntos” de  $X$  en los que cada objeto puede aparecer varias veces y el número total de objetos es  $k$ .

En otros textos, estos objetos también se llaman *combinaciones con repetición*. Definiremos el *coeficiente de multiconjuntos*  $\binom{n}{k}$  como la cantidad de  $k$ -multiconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos. Podemos generalizar el argumento de las apuestas del loto para obtener una fórmula para  $\binom{n}{k}$ .

**Teorema.** El número de  $k$ -multiconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos es

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} = \binom{n+k-1}{k} \quad (n \geq 1, k \in \mathbb{N}).$$

*Demostración.* Pensamos el problema como distribuir  $k$  objetos indistinguibles en  $n$  cajas distinguibles. Si una caja recibe  $a_i$  objetos, entonces

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$$

con  $a_i \geq 0$ .

Representamos cada distribución por una secuencia de  $k$  estrellas y  $n - 1$  barras. Los grupos de estrellas recuperan exactamente las cantidades  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces el problema se reduce a contar secuencias de  $k$  estrellas y  $n - 1$  barras. En total hay  $k + n - 1$  símbolos, y basta elegir cuáles  $k$  de ellos serán estrellas. Por lo tanto, el número de secuencias es  $\binom{n+k-1}{k}$ .  $\square$

Veamos una aplicación de este conteo.

**Ejemplo.** Elegimos  $k$  bolitas entre  $n$  sabores de helado y para cada bolita uno de  $q$  toppings. Suponemos que  $n, q \geq 1$ , que  $k \in \mathbb{N}$  y que el orden de las bolitas no importa. Cada bolita se identifica por su par (sabor, topping), de modo que hay  $nq$  tipos posibles. El helado es un multiconjunto de tamaño  $k$  sobre esos  $nq$  tipos. Como el orden no importa, estamos contando multiconjuntos. La cantidad total es

$$\binom{\binom{nq}{k}}{k} = \binom{nq + k - 1}{k}.$$

### 3.1.4. Recapitulación

Notemos que hemos desarrollado técnicas para contar objetos con y sin orden, con distintas restricciones sobre la cantidad de veces que cada elemento puede aparecer. En la tabla 3.1.4 resumimos los objetos con orden, y en la tabla 3.1.4 los objetos sin orden.

| Objeto                      | Largo              | Restricción                       | ¿Cuántos?                                                 |
|-----------------------------|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Listas                      | $k$                | sin restricción                   | $n^k$                                                     |
| Permutaciones               | $n$                | cada elemento exactamente una vez | $n!$                                                      |
| $k$ -permutaciones          | $k$                | cada elemento a lo más una vez    | $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$                               |
| $\vec{a}$ -multipermutación | $\sum_{i=1}^k a_i$ | objeto $i$ : $a_i$ veces          | $\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$ |

Tabla 3.1: Objetos con orden.

| Objeto         | Seleccionados | ¿Repetición?   | ¿Cuántos?                            |
|----------------|---------------|----------------|--------------------------------------|
| Conjuntos      | $k$           | sin repetición | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ |
| Multiconjuntos | $k$           | con repetición | $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$    |

Tabla 3.2: Objetos sin orden.

Terminaremos la sección con ejemplos que combinan varias de estas técnicas de conteo.

**Ejemplo.** ¿Cuántos strings de longitud  $n$  sobre  $\{0, 1, \dots, m\}$  tienen exactamente  $k$  símbolos distintos de 0, sin repetir ninguno de ellos?

Sean  $n, m, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq \min\{n, m\}$ . Elegimos las  $k$  posiciones no nulas de  $\binom{n}{k}$  maneras. Recorriendo esas posiciones de izquierda a derecha, colocamos una  $k$ -permutación de  $\{1, \dots, m\}$ , lo que ofrece  $(m)_k$  posibilidades. Las posiciones restantes se llenan con ceros. El principio multiplicativo da

$$\binom{n}{k} (m)_k = \binom{n}{k} \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Si  $k > \min\{n, m\}$ , no hay ningún string admisible.

**Ejemplo.** ¿De cuántas formas se pueden poner 8 torres indistinguibles en un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$  casillas sin que se ataquen?

Dos torres se atacan si comparten una fila o una columna. Por lo tanto, debe haber exactamente una torre en cada fila y en cada columna. En la primera fila debemos elegir una de las 8 columnas, en la segunda una de las 7 columnas restantes, y así sucesivamente. Por el principio multiplicativo, el número de formas de colocar las torres es  $8! = 40.320$ .

**Ejemplo.** ¿Cuántas sucesiones débilmente crecientes de  $k \leq n$  elementos en  $\{1, \dots, n\}$  existen?

Notemos que cada multiconjunto de tamaño  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  determina una única sucesión débilmente creciente de  $k$  elementos: basta con ordenar los elementos del multiconjunto de menor a mayor. Por lo tanto, el número de sucesiones débilmente crecientes de  $k$  elementos en  $\{1, \dots, n\}$  es el número de  $k$ -multiconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ , que es

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

**Ejemplo.** ¿Cuántos pares ordenados de subconjuntos  $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$  existen con  $|A| = a$  y  $|B| = b$ ?

Podemos elegir primero  $B$  de  $\binom{n}{b}$  maneras y luego  $A$  de  $\binom{b}{a}$  maneras. El número de pares es

$$\binom{n}{b} \binom{b}{a}.$$

Consideraremos ahora una pregunta similar: ¿Cuántos pares de subconjuntos  $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$  existen?

Para cada elemento de  $\{1, \dots, n\}$  hay tres posibilidades: pertenecer a ambos conjuntos, sólo a  $B$  o a ninguno. No puede pertenecer sólo a  $A$ , pues  $A \subseteq B$ . Por lo tanto, hay  $3^n$  pares de subconjuntos  $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

**Ejemplo.** Supongamos que tenemos  $a \geq k$  pelotas azules y  $r \geq k$  pelotas rojas, todas distinguibles. ¿De cuántas formas se pueden hacer  $k$  parejas de pelotas azules y rojas?

Consideraremos que ninguna pelota puede pertenecer a dos parejas y el orden de las parejas no se distingue. Elegimos las pelotas azules de  $\binom{a}{k}$  maneras y las rojas de  $\binom{r}{k}$  maneras. Fijado cualquier orden de las azules elegidas, hay  $k!$  maneras de asignarles las rojas, una por una. Por tanto el número de colecciones de parejas es

$$\binom{a}{k} \binom{r}{k} k!.$$

## Ejercicios

1. a) Sea  $A$  un conjunto con  $|A| = n$ . Determine, como función de  $n$ , cuántas relaciones sobre  $A$  son reflexivas, cuántas son simétricas, cuántas son simultáneamente reflexivas y simétricas, y cuántas son antisimétricas.
- b) Hay  $m$  pares distinguibles de calcetines, y los dos calcetines de cada par también son distinguibles. Se escogen  $2k$  calcetines, donde  $0 \leq k \leq m$ , y se exige obtener exactamente  $x$  pares completos, donde  $x \in \mathbb{N}$ . Determine el rango de valores de  $x$  para los que esto es posible y, para cada uno de ellos, una fórmula para la cantidad de selecciones.
- c) Sean  $t \geq 1$  y  $d_1, \dots, d_t \in \mathbb{N}$ . Para  $1 \leq i \leq t$ , sea  $L_i$  una lista de  $d_i$  símbolos, y suponga que todos los símbolos que aparecen en estas listas son distintos. Una *intercalación* de  $L_1, \dots, L_t$  es una lista que contiene todos sus símbolos y conserva el orden relativo de los símbolos de cada  $L_i$ . Determine, en términos de  $d_1, \dots, d_t$ , cuántas intercalaciones existen.

- d) Sean  $n \geq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$  y  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ . Se distribuyen  $r$  objetos indistinguibles en  $n$  cajas distinguibles, y la caja  $i$  debe recibir al menos  $b_i$  objetos para cada  $i \in [n]$ . Determine cuándo es posible realizar la distribución y, en ese caso, una fórmula para la cantidad de distribuciones.
- e) Determine el número total de anagramas distintos de MISSISSIPPI y el número de ellos en que no aparecen dos letras I consecutivas.

2. Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 1$  y  $[s] = \{1, \dots, s\}$  para cada  $s \in \mathbb{N}$ . Una *cadena de largo  $t$*  es una lista de subconjuntos

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_t \subseteq [n].$$

- a) Determine cuántas cadenas de largo  $t$  existen.
- b) Suponga que  $n \geq 1$  y tome  $t = n$ . Cuento las cadenas que satisfacen  $|A_i| = i$  para todo  $i \in [n]$ .
- c) Fije enteros  $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_t \leq n$ . Cuento las cadenas que satisfacen  $|A_i| = s_i$  para todo  $i \in [t]$ .
- d) Para  $0 \leq r \leq n$ , cuente las cadenas que satisfacen  $|A_1| = r$ .
- e) Diremos que dos cadenas  $(A_1, \dots, A_t)$  y  $(B_1, \dots, B_t)$  son *equivalentes bajo reetiquetado* si existe una biyección  $\sigma: [n] \rightarrow [n]$  tal que

$$B_i = \{\sigma(x) : x \in A_i\} \quad \text{para todo } i \in [t].$$

Demuestre que esta es una relación de equivalencia y que dos cadenas son equivalentes si y sólo si  $|A_i| = |B_i|$  para todo  $i \in [t]$ . ¿Cuántas clases de equivalencia existen y cuántas cadenas hay en cada clase?

3. Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[n] = \{1, \dots, n\}$  y  $R$  una relación sobre  $[n]$ . Una permutación de  $[n]$  *respeto a  $R$*  si, para cada  $a R b$ , el elemento  $b$  aparece inmediatamente después de  $a$ .

- a) Para  $n = 7$  y  $R = \{(1, 4), (4, 2), (6, 3)\}$ , cuente las permutaciones que respetan  $R$ . ¿Qué ocurre si se agrega el par  $(2, 1)$  a  $R$ ?
- b) Demuestre que, si existe una permutación que respeta  $R$ , se cumplen las tres condiciones siguientes:
- (I)  $(i R j \wedge i R k) \implies j = k$  para todos  $i, j, k \in [n]$ ;
  - (II)  $(j R i \wedge k R i) \implies j = k$  para todos  $i, j, k \in [n]$ ;
  - (III)  $i R^+ i$  para todo  $i \in [n]$ .
- c) Suponga que se cumplen esas tres condiciones y considere  $S = (R \cup R^{-1})^*$ . Demuestre que  $S$  es una relación de equivalencia y que cada clase  $C$  de  $S$  admite una única lista  $(c_1, \dots, c_m)$  que contiene todos los elementos de  $C$  exactamente una vez y satisface  $c_j R c_{j+1}$  para todo  $1 \leq j < m$ .
- d) Demuestre que  $S$  tiene exactamente  $n - |R|$  clases de equivalencia.
- e) Explique por qué los elementos de cada clase de  $S$  deben aparecer consecutivamente, en el orden determinado por  $R$ , en toda permutación que respeta  $R$ . Deduzca una fórmula para la cantidad de permutaciones que respetan  $R$ .