

3.2. Principio aditivo e inclusión-exclusión

La sección anterior mostro el poder del principio multiplicativo para contar objetos que se pueden construir paso a paso. Veremos ahora dos principios que forman la base de los problemas de conteo fundamentales: el principio aditivo y el principio de inclusión-exclusión. Dichos principios nos permitirán modelar alternativas con y sin intersección.

3.2.1. Principio aditivo

El principio aditivo nos dice algo bastante intuitivo: si una tarea puede realizarse de varias maneras alternativas disjuntas, y cada alternativa se puede realizar de cierta cantidad de formas, entonces la tarea general se puede realizar de la suma de esas cantidades.

Principio. Supongamos que una tarea puede realizarse de k maneras alternativas $T_1, \dots, T_k$.

- Si las alternativas son disjuntas par a par, y
- la tarea T_i se puede realizar de n_i formas.

Entonces, la tarea general se puede realizar de $n_1 + \dots + n_k$ maneras.

Demostración. Mostraremos el principio aditivo por inducción sobre k . Para una alternativa, la cantidad es n_1 . Para $k \geq 2$, supongamos que las primeras $k - 1$ alternativas pueden realizarse en total de $n_1 + \dots + n_{k-1}$ maneras. Como la alternativa T_k es disjunta de todas las anteriores, sus n_k maneras son distintas de las ya contadas. Al agregarlas, obtenemos $n_1 + \dots + n_{k-1} + n_k$ maneras de realizar la tarea general. $\square$

Nuevamente, podemos rephrasing el principio en términos de la teoría de conjuntos: si $A_1, \dots, A_k$ son conjuntos finitos disjuntos par a par, entonces el tamaño de su unión es la suma de sus tamaños.

Principio. Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos disjuntos par a par. Tenemos que

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Demostración. Elegir un elemento de $\bigcup_{i=1}^k A_i$ equivale a elegir un elemento de A_i , definiremos eso como la tarea T_i . La tarea T_i puede realizarse de $|A_i|$ maneras. Como los conjuntos son disjuntos par a par, cada elemento de la unión corresponde a exactamente una de estas alternativas. Aplicando el principio aditivo, obtenemos

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|. \quad \square$$

La aplicación típica del principio aditivo aparece cuando uno puede separar el conteo en casos disjuntos, y cada caso se puede contar, por ejemplo, con el principio multiplicativo.

Ejemplo. Supongamos que una empresa busca formar un comité. La empresa tiene 25 empleados con 10 de ellos como representantes de la empresa. El comité tiene que tener 6 personas y a lo más 2 representantes de la empresa. ¿Cuántas formas hay de formar el comité?

Notemos que tenemos tres casos disjuntos: el comité puede tener 0, 1 o 2 representantes de la empresa. Más aún, si el comité tiene r representantes de la empresa, entonces los otros $6 - r$ miembros del comité se eligen entre los 15 empleados que no son representantes de la empresa. Luego, el número de formas de formar el comité es

$$\binom{15}{6} \cdot \binom{10}{0} + \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{1} + \binom{15}{4} \cdot \binom{10}{2} = 5.005 + 30.030 + 61.425 = 75.985.$$

Ejemplo. Una baraja usual de cartas tiene 52 cartas, de las cuales 13 son corazones y 39 son de las otras pintas. Una mano de póker estándar tiene 5 cartas. ¿Cuántas manos de póker tienen entre 2 y 3 corazones?

Nuevamente tenemos casos disjuntos: una mano válida puede tener exactamente 2 o exactamente 3 corazones. Una mano con exactamente j corazones se obtiene escogiendo j de los 13 corazones y $5 - j$ de las otras 39 cartas. Los casos $j = 2$ y $j = 3$ son disjuntos, por lo que hay

$$\binom{13}{2} \binom{39}{3} + \binom{13}{3} \binom{39}{2} = 924.768$$

manos de póker con entre 2 y 3 corazones.

Ejemplo. ¿Cuántas patentes chilenas hay?

Las patentes chilenas tienen dos formatos posibles: el primero tiene dos letras seguidas de cuatro dígitos, y el segundo tiene cuatro letras seguidas de dos dígitos. Nuevamente, ambos casos son disjuntos. Recordando que hay 18 letras válidas para las patentes, y que los dígitos válidos son 0 a 9, podemos contar las patentes de cada formato y luego sumar los resultados. Luego, el número total de patentes chilenas es la suma de las $18^2 \cdot 10^4$ patentes del primer formato y las $18^4 \cdot 10^2$ patentes del segundo formato:

$$18^2 \cdot 10^4 + 18^4 \cdot 10^2 = 13.737.600.$$

Ejemplo. Intentaremos ahora contar los anagramas de la palabra COMBINATORIA que comienzan con una vocal.

La palabra tiene 12 letras: A , I y O aparecen dos veces cada una, y C , B , N , T , R , M aparecen una vez cada una. Contaremos primero los anagramas que comienzan con A : notemos que una vez hecha dicha elección tenemos que completar con un anagrama de las 11 letras restantes, que incluyen I y O dos veces cada una. Luego, el número de anagramas que comienzan con A es $\frac{11!}{2! \cdot 2!}$. De manera similar, el número de anagramas que comienzan con I o O es también $\frac{11!}{2! \cdot 2!}$. Por lo tanto, el número total de anagramas de COMBINATORIA que comienzan con una vocal es

$$3 \cdot \frac{11!}{2! \cdot 2!} = 29.937.600.$$

Ejemplo. Una chocolatería ofrece $T \geq 2$ tipos de chocolate, uno siendo el *chocolate clásico*. ¿De cuántas formas pueden vender cajas de docenas de chocolates si tienen que contener a lo más 4 chocolates clásicos?

Contaremos cajas de doce chocolates por su contenido, es decir, sin distinguir su orden. Si $T \geq 2$, una caja con exactamente j clásicos se completa con un multiconjunto de tamaño $12 - j$ sobre los otros $T - 1$ tipos. Para $j = 0, 1, 2, 3, 4$, la cantidad es

$$\binom{\binom{T-1}{12-j}}{12-j} = \binom{(T-1) + (12-j) - 1}{12-j} = \binom{T+10-j}{12-j}.$$

Los cinco casos son disjuntos y cubren todas las cajas permitidas, de modo que la respuesta es

$$\sum_{j=0}^4 \binom{T+10-j}{12-j} = \binom{T+10}{12} + \binom{T+9}{11} + \binom{T+8}{10} + \binom{T+7}{9} + \binom{T+6}{8}.$$

Ejemplo. Una clave de un banco *debe* tener largo k . Dichas claves pueden contener dígitos o una de las 27 letras. ¿Cuántas contienen a lo más $r \leq k$ letras?

Para formar una clave con exactamente j letras, elegimos las posiciones de las letras de $\binom{k}{j}$ maneras, llenamos esas posiciones de 27^j maneras y las restantes de 10^{k-j} maneras. Como la cantidad de letras puede variar entre 0 y r de manera disjunta, la cantidad total de claves es $\sum_{j=0}^r \binom{k}{j} 27^j 10^{k-j}$.

3.2.2. Principio de inclusión-exclusión

Los ejemplos anteriores nos deberían haber convencido de la potencia del principio aditivo cuando podemos particionar en casos disjuntos. Naturalmente, nos preguntamos ahora que ocurre cuando los casos no son disjuntos.

Ejemplo. Tenemos un curso donde 14 estudiantes juegan basketball, 17 juegan fútbol, y 4 juegan ambos deportes. ¿Cuántos juegan al menos uno de los dos deportes?

Notemos que al solamente sumar $14 + 17$ hemos contando dos veces a los cuatro estudiantes que juegan ambos deportes. Luego, podemos corregir dicho conteo restando 4 obteniendo $14 + 17 - 4 = 27$ estudiantes que juegan al menos uno de los dos deportes.

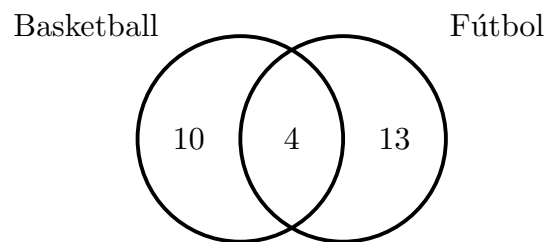


Figura 3.1: Podemos representar de manera compacta la situación con un diagrama de Venn.

Podemos generalizar el ejemplo anterior a conjuntos finitos arbitrarios: sumando los tamaños y corriendo el doble conteo de la intersección. Esto nos entrega la siguiente versión del principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos.

Principio. Sean A y B conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

La demostración de este principio es una consecuencia del principio aditivo.

Demostración. Notemos que $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ es una unión disjunta. Luego, el principio aditivo nos da $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$. Además, la unión $A \cup B$ puede escribirse de manera disjunta como $A \cup (B \setminus A)$. Usando estos dos hechos, tenemos que

$$|A \cup B| = |A| + \underbrace{|B \setminus A|}_{=|B|-|A \cap B|} = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad \square$$

Veamos algunos ejemplos de conteos que requieren corregir la intersección de dos conjuntos.

Ejemplo. ¿Cuántos enteros en $\{1, \dots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5?

Sea A el conjunto de los múltiplos de 3 y B el de los múltiplos de 5 en ese intervalo. Hay $\lfloor 1000/3 \rfloor = 333$ elementos en A y $\lfloor 1000/5 \rfloor = 200$ en B . La intersección está formada por los múltiplos de 15, pues 3 y 5 son primos distintos, y tiene $\lfloor 1000/15 \rfloor = 66$ elementos. Así, los enteros que son múltiplos de 3 o 5 son

$$|A \cup B| = 333 + 200 - 66 = 467.$$

Ejemplo. Tenemos $n \geq 2$ personas, dos llamadas Alicia y Bob. ¿Cuántos comités de $k \leq n$ personas contienen a Alicia o Bob?

Notemos que hay $\binom{n-1}{k-1}$ comités que contienen a Alicia: una vez incluida ella, escogemos los otros $k-1$ integrantes. De manera similar, hay $\binom{n-1}{k-1}$ comités que contienen a Bob. Notemos que los que contienen a ambos se obtienen escogiendo $k-2$ personas entre las otras $n-2$, es decir, $\binom{n-2}{k-2}$ comités. Por tanto, el número de comités que contienen a Alicia o Bob es

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2} = 2\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2}.$$

Los ejemplos anteriores nos muestran como usar el principio de inclusión-exclusión cuando tenemos *dos* opciones que interactúan entre sí. ¿Qué ocurre si tenemos, por ejemplo, tres opciones?

Ejemplo. Consideremos un curso donde 14 estudiantes juegan tenis, 17 juegan básquet y 18 juegan fútbol. Más aún, conocemos las cantidades de las intersecciones dadas por el siguiente diagrama de Venn (ver Figura 3.2).

Notemos que en $|A| + |B| + |C|$, cada estudiante que practica un solo deporte se cuenta una vez, cada estudiante que practica exactamente dos deportes se cuenta dos veces, y quien practica los tres se cuenta tres veces. Al restar las tres intersecciones por pares, los estudiantes de exactamente dos deportes quedan contados una vez, pero quien practica los tres queda contado cero veces. Por tanto, debemos corregir nuevamente sumando la intersección triple. Así, el total es

$$14 + 17 + 18 - 4 - 3 - 2 + 1 = 41.$$

Nuevamente podemos generalizar la idea anterior a conjuntos finitos arbitrarios: sumando los tamaños y corriendo el doble conteo de las intersecciones por pares, y luego corrigiendo la intersección triple.

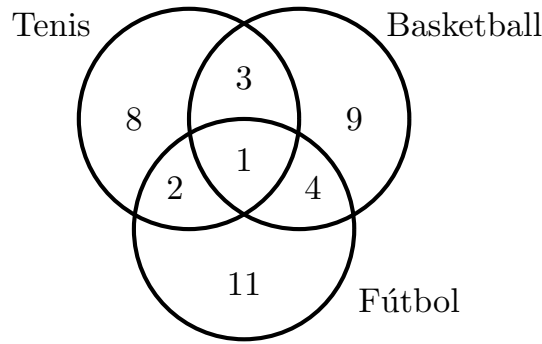


Figura 3.2: Diagrama de Venn indicando la participación de los estudiantes en los distintos deportes.

Principio. Sean A, B, C conjuntos finitos. Tenemos que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Demostración. Aplicando el principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos a $(A \cup B) \cup C$ obtenemos que:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Como $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, una segunda aplicación da

$$|(A \cup B) \cap C| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Al sustituir esta igualdad y $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, obtenemos el enunciado. $\square$

Veamos un ejemplo de conteo que requiere corregir las intersecciones de tres conjuntos.

Ejemplo. ¿Cuántos enteros en $\{1, \dots, 1000\}$ son divisibles por 3 o 5 o 7?

Los tres conjuntos tienen tamaños 333, 200 y 142. Sus intersecciones por pares son los múltiplos de 15, 21 y 35, con tamaños 66, 47 y 28. La intersección triple está formada por los múltiplos de 105 y tiene 9 elementos. El principio de inclusión-exclusión da

$$333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543.$$

Una pregunta natural ahora es qué ocurre para una cantidad arbitraria k de conjuntos finitos. Notemos que lo anterior sugiere un patrón: sumamos los tamaños de los conjuntos, restamos las intersecciones por pares, sumamos las intersecciones triples, y así sucesivamente. Es decir, esperamos que la fórmula general sea una suma alternante de las intersecciones de todos los subconjuntos no vacíos de $\{A_1, \dots, A_k\}$. Esto es exactamente el enunciado del principio de inclusión-exclusión para k conjuntos finitos.

Principio. Sean $A_1, \dots, A_k$ conjuntos finitos.

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}|.$$

Acá los índices $i_1, \dots, i_j$ recorren todos los j -subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$.

Si bien la fórmula anterior parece ser compleja, simplemente indica lo que intuimos. En particular, para $k = 4$ la fórmula es

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

Para k mayores la fórmula se vuelve más engorrosa (tiene $2^k - 1$ términos), pero la idea es la misma: sumamos los tamaños de los conjuntos, restamos las intersecciones por pares, sumamos las intersecciones triples, y así sucesivamente.

Procederemos a ver una demostración del principio de inclusión-exclusión. Si bien uno podría esperar una demostración por inducción, la siguiente demostración sigue un argumento de conteo más conciso. La idea principal es tratar de probar que cada elemento de la unión aparece exactamente una vez en el lado derecho de la igualdad.

Demostración del principio de inclusión-exclusión. Fijemos un elemento $x \in \bigcup_{i=1}^k A_i$ de la unión y definamos I_x como el conjunto de índices de los conjuntos que contienen a x , es decir,

$$I_x = \{i \in \{1, \dots, k\} : x \in A_i\}.$$

El elemento x pertenece a la intersección determinada por un subconjunto no vacío J de índices si y sólo si $J \subseteq I_x$. Notemos que eso pasa exactamente $\binom{|I_x|}{j}$ veces, por lo tanto, la contribución de x al lado derecho de la igualdad es

$$\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_j\} \subseteq I_x} 1 = \sum_{j=1}^{|I_x|} (-1)^{j-1} \binom{|I_x|}{j}.$$

Esta última cantidad se parece bastante al teorema del binomio. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{|I_x|} (-1)^{j-1} \binom{|I_x|}{j} &= - \sum_{j=1}^{|I_x|} (-1)^j \binom{|I_x|}{j} \\ &= 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^{|I_x|} (-1)^j 1^{|I_x|-j} \binom{|I_x|}{j}}_{=(1-1)^{|I_x|} \text{ por teo. del binomio}} \\ &= 1 - (1-1)^{|I_x|} = 1. \end{aligned}$$

Luego, cada $x \in \bigcup_{i=1}^k A_i$ contribuye exactamente 1 al lado derecho de la igualdad, y también al lado izquierdo, por lo que la igualdad se cumple. $\square$

La fórmula anterior es especialmente útil cuando las intersecciones $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$ se pueden contar usando otros principios de conteo. Más aún, usualmente el principio se usa en negativo: donde buscamos prohibir que ocurran ciertas condiciones, y los conjuntos A_i representan los objetos que violan la condición i .

Veamos un par de ejemplos del principio de inclusión-exclusión general en acción

Ejemplo. Tenemos una fiesta de n invitados cada uno con su sombrero. Los invitados se dan cuenta al volver a casa que ninguno volvió con su sombrero. ¿De cuántas formas esto puede ocurrir?

Etiquetaremos a los invitados y sus respectivos sombreros del 1 al n . Notemos que necesitamos prohibir que el invitado i se lleve su propio sombrero, para cada $i = 1, \dots, n$. Por tanto, definiremos a A_i como el conjunto de permutaciones de los sombreros donde el invitado i se lleva su propio sombrero. Notemos que

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (n - j)!.$$

En efecto, una vez que los invitados $i_1, \dots, i_j$ se llevan sus propios sombreros, los otros $n - j$ invitados pueden llevarse cualquier sombrero de los restantes. Luego, el principio de inclusión-exclusión nos da que la cantidad de permutaciones donde algún invitado se lleva su propio sombrero es

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{i_1, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{i_1, \dots, i_j} (n - j)! \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (n - j)! \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_j} 1}_{=\binom{n}{j}} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n - j)!. \end{aligned}$$

Acá la suma $\sum_{i_1, \dots, i_j} 1$ es el número de subconjuntos de tamaño j de $\{1, \dots, n\}$, que es $\binom{n}{j}$. Por último, la cantidad de permutaciones donde ningún invitado se lleva su propio sombrero es

$$n! - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n - j)! = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n - j)! = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n!}{j!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e}.$$

Es decir, la probabilidad de que ningún invitado se lleve su propio sombrero tiende a $1/e \approx 0.3679$ cuando n crece.

Ejemplo. ¿Cuántas funciones sobreyectivas de $\{1, \dots, k\}$ en $\{1, \dots, n\}$ hay?

Notemos que necesitamos prohibir que el valor i quede sin preimagen, para cada $i = 1, \dots, n$. Por tanto, definiremos a A_i como el conjunto de funciones donde el valor i queda sin preimagen. Notemos que

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = (n - j)^k.$$

En efecto, una vez que los valores $i_1, \dots, i_j$ quedan sin preimagen, cada uno de los k elementos del dominio puede tener como imagen cualquiera de los $n - j$ valores restantes.

Luego, el principio de inclusión-exclusión nos da que la cantidad de funciones donde algún valor del codominio queda sin preimagen es

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{i_1, \dots, i_j} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{i_1, \dots, i_j} (n-j)^k \\
 &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (n-j)^k \underbrace{\sum_{i_1, \dots, i_j} 1}_{=\binom{n}{j}} \\
 &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k.
 \end{aligned}$$

Acá la suma $\sum_{i_1, \dots, i_j} 1$ es el número de subconjuntos de tamaño j de $\{1, \dots, n\}$, que es $\binom{n}{j}$. Por último, la cantidad de funciones donde ningún valor del codominio queda sin preimagen, es decir, de funciones sobreyectivas, es

$$n^k - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Ejercicios

1. a) Una cerradura tiene $n \geq 1$ botones distinguibles. Una acción consiste en presionar un botón o dos botones distintos simultáneamente; en este último caso no se distingue un orden entre los dos botones. Una clave es una lista de $r \geq 1$ acciones. ¿Cuántas claves existen? ¿Cuántas existen si ningún botón puede aparecer en más de una acción?
- b) Hay $n \geq 1$ bugs distintos y n desarrolladores distintos. Cada bug se asigna a un único desarrollador, que puede recibir cualquier cantidad de bugs, incluso cero. Cuenten las asignaciones en las que no todos los desarrolladores reciben exactamente un bug.
- c) Se ordenan $n \geq 4$ libros distintos $L_1, \dots, L_n$ en un estante. Cuenten los ordenamientos en los que L_2 no queda inmediatamente a la derecha de L_1 y L_4 no queda inmediatamente a la derecha de L_3 .
- d) Para $n \geq 1$, cuenten las bolsas de n frutas, elegidas entre manzanas, plátanos, naranjas y peras, que contienen un número par de manzanas, un número impar de plátanos, a lo más una naranja y a lo más una pera. Las frutas de cada tipo son indistinguibles y el orden dentro de la bolsa no importa.

Indicación: considere los casos n par y n impar.

2. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $G = \{0, \dots, a\} \times \{0, \dots, b\}$. Un *camino creciente* es una lista de puntos de G que comienza en $(0, 0)$, termina en (a, b) y en cada paso aumenta una coordenada en 1, dejando la otra fija. Para $P = (u, v)$ y $Q = (s, t)$, escribimos $P \preceq Q$ cuando $u \leq s$ y $v \leq t$. Dos puntos son *incomparables* si no se cumple $P \preceq Q$ ni $Q \preceq P$.

- a) Cuenten los caminos crecientes de $(0, 0)$ a (a, b) .

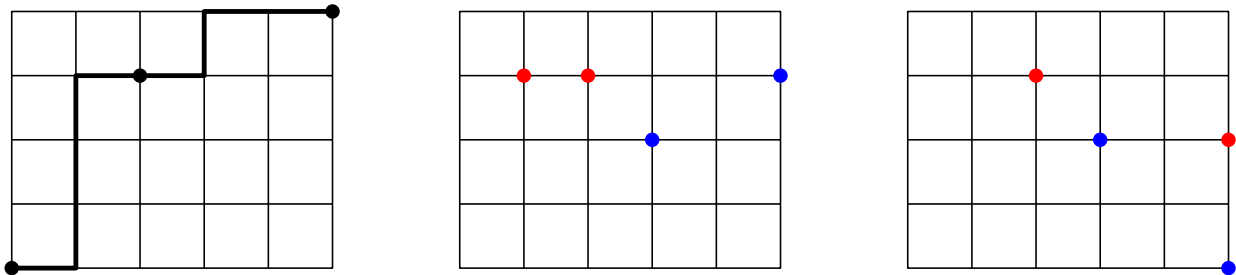


Figura 3.3: Izquierda: un camino creciente de $(0, 0)$ a $(5, 4)$ pasando por $(2, 3)$. Centro: dos pares de puntos comparables (en rojo y azul). Derecha: dos pares de puntos incomparables (en rojo y azul).

- b) Determine cuántos caminos crecientes pasan por un punto fijo $(u, v) \in G$.
 - c) Sean $P, Q \in G$ distintos. Demuestre que existe un camino creciente que pasa por ambos si y sólo si $P \preceq Q$ o $Q \preceq P$. Obtenga una fórmula para la cantidad de esos caminos en cada caso.
 - d) Sea $F \subseteq G$ un conjunto de puntos incomparables par a par. Demuestre que un camino creciente pasa por a lo más un punto de F . Deduzca una fórmula para la cantidad de caminos que no pasan por ningún punto de F .
 - e) Para $n \geq 1$, cuente los caminos crecientes de $(0, 0)$ a $(4n, 4n)$ que no pasan por ninguno de los puntos (n, n) , $(2n, 2n)$ y $(3n, 3n)$.
3. Para enteros positivos $x_1, \dots, x_r$, denotamos por $\gcd(x_1, \dots, x_r)$ su máximo común divisor. Dos enteros son *coprimos* si su máximo común divisor es 1. Para $n \geq 1$, la *función de Euler* es

$$\varphi(n) = |\{x \in \{1, \dots, n\} : \gcd(x, n) = 1\}|,$$

es decir, la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n que son coprimos con n .

- a) Sean $p_1, \dots, p_k$ los factores primos distintos de n . Aplique inclusión-exclusión para probar que

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Deduzca que, para $m, n \geq 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ cuando $\gcd(m, n) = 1$.

- b) Sean $N \geq 1$ y $r \geq 2$. Un punto $X = (x_1, \dots, x_r) \in \{1, \dots, N\}^r$ es *visible desde el origen* si no existe $t \in \mathbb{R}$, con $0 < t < 1$, tal que todas las coordenadas de tX sean enteras. Pruebe que esto equivale a $\gcd(x_1, \dots, x_r) = 1$.
- c) Definimos la *función de Möbius*:

$$\mu(d) = \begin{cases} 1, & d = 1, \\ 0, & \text{si algún cuadrado de un primo divide a } d, \\ (-1)^j, & \text{si } d \text{ es producto de } j \text{ primos distintos.} \end{cases}$$

Sea $V_r(N)$ la cantidad de puntos visibles desde el origen en $\{1, \dots, N\}^r$. Muestre, usando inclusión-exclusión, que

$$V_r(N) = \sum_{d=1}^N \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor^r.$$

Concluya también el caso particular $V_2(N) = 2 \sum_{j=1}^N \varphi(j) - 1$.