

3.3. Principio biyectivo y del palomar

Hasta ahora hemos usado los principios multiplicativo y aditivo para contar cantidades de objetos. En esta sección veremos algunos *principios sin conteo*: usaremos el conteo para demostrar identidades y para asegurar la existencia de objetos con ciertas propiedades. Comenzaremos con las demostraciones combinatoriales y luego estudiaremos el principio del palomar y su versión en términos de promedios.

3.3.1. Demostraciones combinatoriales y principio biyectivo

Volvamos por un segundo a los anagramas de BANANA. En la sección del principio multiplicativo los contamos de dos maneras. Por un lado, etiquetamos las letras y corregimos el sobreconteo que producen las tres letras A y las dos letras N , obteniendo $\frac{6!}{3!2!}$ anagramas. Por otro lado, elegimos las tres posiciones de las letras A entre las seis disponibles, luego las dos posiciones de las letras N entre las tres restantes y llenamos la posición restante con la letra B . Esto nos dio $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1$ anagramas. Notemos que las dos expresiones deben ser iguales porque cuentan los anagramas de la misma palabra, incluso sin calcular cuánto vale cada una. Es decir, tenemos la identidad

$$\frac{6!}{3!2!} = \binom{6}{3} \binom{3}{2}.$$

El argumento anterior es una *demostración combinatorial*: mostramos que dos expresiones son iguales porque cuentan lo mismo.

Definición. Una *demostración combinatorial* de una identidad es un argumento que explica por qué ambos lados cuentan el mismo conjunto de objetos.

La idea tras estas demostraciones viene de un principio combinatorial: el *principio biyectivo*.

Principio. Si A y B son conjuntos finitos y existe una biyección $f: A \rightarrow B$, entonces $|A| = |B|$.

Demostración. Si $A = \emptyset$, la sobreyectividad asegura que $B = \emptyset$ y ambos conjuntos tienen 0 elementos. Si $A = \{a_1, \dots, a_m\} \neq \emptyset$, la inyectividad asegura que $f(a_1), \dots, f(a_m)$ son distintos y la sobreyectividad asegura que son todos los elementos de B . Por lo tanto, B también tiene m elementos. $\square$

Usualmente no escribiremos una función y luego verificar por separado que es inyectiva y sobreyectiva. Nos bastará con explicar por qué las dos formas de contar describen cada elección exactamente una vez, tal como lo hicimos con los anagramas. Veamos algunas identidades que podemos demostrar de esta manera.

Ejemplo. Demostremos la simetría de los coeficientes binomiales: para $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Consideremos un grupo de n personas del que queremos elegir un comité de k integrantes. El lado izquierdo cuenta las formas de elegir a las k personas que integran el comité, mientras que el lado

derecho cuenta las formas de elegir a las $n - k$ personas que quedan fuera. Luego, ambas cantidades son iguales.

Ejemplo. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$. Demostremos que

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Para ello, contemos los comités de k personas con un presidente que podemos formar a partir de un grupo de n personas. Si primero escogemos el comité y luego a su presidente, hay $\binom{n}{k}k$ posibilidades. También podemos elegir primero al presidente, de n maneras, y luego a los otros $k - 1$ integrantes entre las $n - 1$ personas restantes, de $\binom{n-1}{k-1}$ maneras. Ambos procedimientos cuentan los mismos comités con presidente, por lo que obtenemos la igualdad.

Ejemplo. Demostremos la identidad de Pascal: para $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Consideremos un grupo de $n + 1$ personas y distingamos a una de ellas, que llamaremos Alicia. Queremos elegir un comité de k personas: el lado izquierdo cuenta exactamente esto.

Para el lado derecho, consideraremos dos casos disjuntos: el comité contiene a Alicia o no la contiene. En el primer caso, debemos elegir a los otros $k - 1$ integrantes entre las n personas restantes, de $\binom{n}{k-1}$ maneras. En el segundo, debemos elegir a todos los integrantes entre esas n personas, de $\binom{n}{k}$ maneras. Luego, el principio aditivo nos da la igualdad.

Ejemplo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, demostremos que

$$4^n - 3^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{n-k}.$$

Contemos las palabras de largo n sobre el alfabeto $\{0, 1, 2, 3\}$ que contienen al menos un 0. Hay 4^n palabras en total, de las cuales 3^n no contienen ningún 0, pues usan solamente las letras 1, 2, 3. Por lo tanto, hay $4^n - 3^n$ palabras que contienen al menos un 0.

Por otro lado, si una palabra contiene exactamente k ceros, podemos elegir sus posiciones de $\binom{n}{k}$ formas. Cada una de las otras $n - k$ posiciones se llena con una de las tres letras 1, 2, 3, de modo que hay $\binom{n}{k} 3^{n-k}$ palabras con exactamente k ceros. Sumando sobre $k = 1, \dots, n$, el principio aditivo nos da el lado derecho de la identidad.

La siguiente igualdad se conoce como la *identidad de Vandermonde*.

Proposición. Para $m, n, r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Recordemos que $\binom{a}{b}$ vale 0 si $b < 0$ o $b > a$.

Demostración. Consideremos dos grupos disjuntos, de m y n personas, y contemos los comités de r integrantes que podemos formar con ellos. Podemos elegir directamente a las r personas entre las $m + n$ disponibles, de $\binom{m+n}{r}$ maneras. También podemos separar en casos según la cantidad k de integrantes que pertenecen al primer grupo. Para cada k , elegimos k personas del primer grupo y $r - k$ del segundo, de $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ maneras. Los casos son disjuntos, por lo que el principio aditivo nos da la igualdad. La convención anterior corresponde a que no hay subconjuntos de tamaño negativo o mayor que el del conjunto del que elegimos. Si $r > m + n$, ambos lados valen cero. $\square$

La siguiente igualdad es conocida como *identidad del palo de hockey*.

Proposición. Para $n, r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r \leq n$,

$$\sum_{j=r}^n \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Demostración. Contemos los subconjuntos de tamaño $r + 1$ de $\{1, \dots, n + 1\}$. Por un lado, hay $\binom{n+1}{r+1}$ subconjuntos. Por otro lado, si el mayor elemento de un subconjunto es $j + 1$, debemos elegir sus otros r elementos entre $1, \dots, j$, de $\binom{j}{r}$ maneras.

Notemos que cada subconjunto tiene un único máximo, que puede variar entre $r + 1$ y $n + 1$. Luego, sumando sobre $j = r, \dots, n$, obtenemos la igualdad. $\square$

3.3.2. Identidades polinomiales

Hasta ahora hemos demostrado identidades entre cantidades de objetos. ¿Podemos usar estos argumentos para demostrar igualdades que involucren números reales? Si ambos lados son polinomios, bastará con demostrar la igualdad para valores naturales. Esto es una consecuencia del siguiente lema.

Lema. Sea $r \in \mathbb{N}$ y $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$. Si $P(a_1, \dots, a_r) = Q(a_1, \dots, a_r)$ para todo $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$, entonces $P = Q$.

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre r .

Partiremos con el caso $r = 1$. Una consecuencia del teorema fundamental del álgebra asegura que un polinomio no nulo de grado a lo más d tiene a lo más d raíces distintas. Notemos que si $P - Q$ no es el polinomio cero, entonces es un polinomio no nulo de algún grado d . Luego, $P - Q$ no puede anularse en más de d enteros distintos, lo que contradice el hecho de que se anula en todos los enteros.

Supongamos que $r \geq 2$ y escribamos

$$P - Q = \sum_{j=0}^d R_j(x_1, \dots, x_{r-1})x_r^j,$$

donde cada R_j es un polinomio en las primeras $r - 1$ variables. Fijemos $(a_1, \dots, a_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$. El polinomio en x_r que obtenemos se anula para todo $x_r \in \mathbb{N}$, por lo que es el polinomio cero. Luego, todos sus coeficientes $R_j(a_1, \dots, a_{r-1})$ son cero. Como esto ocurre para toda elección de

$(a_1, \dots, a_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$, la hipótesis inductiva asegura que cada R_j es el polinomio cero. Por lo tanto, $P - Q = 0$. $\square$

Usaremos el lema para probar identidades polinomiales via demostraciones combinatoriales. Partiremos con el *teorema del binomio de Newton*.

Teorema. Para $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Demostración. Por el lema anterior, basta con demostrar la igualdad para $x, y \in \mathbb{N}$. Sea X un alfabeto con x letras distintas, e Y un alfabeto con y letras distintas y disjuntos de X . Luego, $(x + y)^n$ es la cantidad de palabras de largo n formadas con letras de $X \cup Y$.

Por otro lado, podemos separar los casos según la cantidad k de letras elegidas de X . Para cada k , elegimos primero las posiciones de las letras de X entre las n disponibles, de $\binom{n}{k}$ maneras. Luego, elegimos las letras de X y de Y para llenar esas posiciones, de x^k y y^{n-k} maneras, respectivamente. Por lo tanto, la cantidad total de palabras es $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. De donde obtenemos la igualdad. $\square$

Ejemplo. Demostremos que, para un entero $n \geq 1$ y todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1 + x)^{n-1}.$$

Nuevamente, por el lema anterior, basta con demostrar la igualdad para $x \in \mathbb{N}$. Tomemos un alfabeto formado por una letra blanca y x letras coloreadas. Contemos las palabras de largo n con una posición marcada, que debe contener una letra coloreada.

Si hay k posiciones coloreadas, elegimos sus lugares, sus letras y cuál de esas posiciones marcar. Esto da $\binom{n}{k} x^k k$ elecciones. Luego, el número total de elecciones es

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k.$$

También podemos elegir primero la posición marcada, de n maneras, y su letra, de x maneras. Cada una de las otras $n - 1$ posiciones se puede llenar con cualquiera de las $x + 1$ letras. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1 + x)^{n-1}.$$

De donde obtenemos la igualdad para $x \in \mathbb{N}$ y, por el lema, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.3.3. Principio del palomar

Otra aplicación de los argumentos combinatoriales es mostrar la existencia de objetos con ciertas propiedades.

Ejemplo. En un torneo de ajedrez participan $n \geq 2$ personas, y cada par puede jugar a lo más una partida entre ellos. Al terminar el torneo, hay dos participantes que terminaron la misma cantidad de partidas. ¿Por qué?

Notemos que cada participante ha terminado entre 0 y $n - 1$ partidas. Sin embargo, los valores 0 y $n - 1$ no pueden aparecer simultáneamente: si alguien terminó sus $n - 1$ partidas, entonces todas las demás personas terminaron al menos su partida contra esa persona. Por lo tanto, aparecen a lo más $n - 1$ valores distintos. Pero, como hay n participantes, alguno de esos valores se repite.

Este tipo de argumento se conoce como el *principio del palomar* o *principio de Dirichlet*.

Principio. Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $m > k \geq 1$. Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

Demostración. Si cada caja tiene a lo más un objeto, las k cajas contendrían en total a lo más k objetos. Esto contradice que se hayan distribuido $m > k$ objetos. $\square$

Ejemplo. Cuatro amigos compiten durante 37 días. Cada día hay un único ganador y un único último lugar, pero puede haber un empate entre el segundo y el tercer lugar. Mostremos que en dos días se obtiene la misma clasificación.

Si no hay empates, hay $4! = 24$ clasificaciones posibles. Si hay un empate, podemos elegir a los dos amigos que empatan de $\binom{4}{2}$ formas, y ordenar a los otros dos de $2!$ formas. Como los casos son disjuntos, hay

$$4! + \binom{4}{2} 2! = 24 + 12 = 36$$

clasificaciones posibles. Asignemos cada día a su clasificación final. Como hay 37 días y sólo 36 clasificaciones, el principio del palomar asegura que alguna se repite.

Ejemplo. Tenemos $n^2 + 1$ puntos en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, con $n \geq 1$ entero. Mostraremos que dos de ellos están a distancia a lo más $\sqrt{2}/n$.

Dividamos el cuadrado en n^2 subcuadrados de lado $1/n$. Asignemos cada punto a un subcuadrado que lo contenga; si está en una frontera compartida, escojamos uno solo de los subcuadrados correspondientes. Hay más puntos que subcuadrados, por lo que dos puntos quedan asignados al mismo subcuadrado. La distancia entre ellos es a lo más la longitud de su diagonal:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Ejemplo. Tenemos un conjunto A de diez enteros positivos distintos, todos menores que 100. ¿Existen dos subconjuntos disjuntos y no vacíos de A cuyos elementos sumen lo mismo?

El conjunto A tiene $2^{10} = 1024$ subconjuntos. A cada $B \subseteq A$ le asignamos la suma de sus elementos, con suma 0 para el subconjunto vacío. Cada suma es un entero entre 0 y $10 \cdot 99 = 990$, por lo que hay a lo más 991 cajas. Existen, entonces, subconjuntos distintos $B, C \subseteq A$ que suman lo mismo.

Notemos que no hemos terminado: necesitamos que B y C sean disjuntos y no vacíos. Los conjuntos $B \setminus C$ y $C \setminus B$ son disjuntos y siguen teniendo la misma suma (pues restamos los elementos comunes a ambos). Además, ambos son no vacíos: si uno fuera vacío, la positividad de los elementos obligaría a que el otro también lo fuera, y tendríamos $B = C$.

Ejemplo. Ramsey organiza una fiesta para n invitados, quienes se sientan en una mesa redonda. Como Ramsey es muy organizado, asigna a cada uno de sus invitados un asiento respectivo en la mesa redonda. Sin embargo, los invitados de Ramsey son bastante desconsiderados y cada uno se sienta en un puesto distinto al que le corresponde. Mostraremos que es posible girar la mesa de manera que al menos dos invitados queden en el puesto correcto.

Supongamos que $n \geq 2$, que los asientos están igualmente espaciados y que frente a cada uno hay una tarjeta con el nombre de un invitado. Las tarjetas están sobre la mesa y giran con ella, mientras los invitados permanecen sentados. Quedar en el puesto correcto significa tener la tarjeta propia enfrente.

Consideremos los $n - 1$ giros de la mesa en $1, 2, \dots, n - 1$ posiciones, siempre en el mismo sentido. Para cada invitado hay exactamente un giro que pone su tarjeta enfrente: al recorrer las n posiciones, cada tarjeta pasa una vez frente a cada asiento, y el giro de cero posiciones no sirve porque todos están inicialmente mal ubicados. Asignemos cada invitado al giro que lo deja en el puesto correcto. Hay n invitados y $n - 1$ giros posibles, así que algún giro corresponde a por lo menos dos invitados. Al realizarlo, ambos quedan en el puesto correcto.

Ejemplo. Elegimos $n + 1$ enteros distintos de $\{1, 2, \dots, 2n\}$, con $n \geq 1$. Mostraremos que uno de los elegidos divide a otro.

Notemos que todo entero positivo a se puede escribir de manera única como $a = 2^r b$, con b impar y $r \geq 0$. Para obtenerla, dividimos sucesivamente por 2 hasta llegar a un número impar. La expresión es única porque, si $2^r b = 2^s c$ con b, c impares y $r < s$, tendríamos $b = 2^{s-r} c$, contradiciendo que b es impar.

Llamemos a b la parte impar de a . Entre 1 y $2n$ hay exactamente n valores posibles para esa parte impar: $1, 3, \dots, 2n - 1$. Entonces, de los $n + 1$ números elegidos tenemos que dos tienen la misma parte impar b . Como son distintos, podemos escribirlos como $2^r b$ y $2^s b$ con $r < s$. El segundo es 2^{s-r} veces el primero, de modo que el primero divide al segundo.

3.3.4. Principio del palomar generalizado

El principio de palomar nos permitió asegurar la existencia de al menos dos objetos en una caja. Uno puede generalizar el argumento para asegurar la existencia de al menos r objetos en una caja.

Ejemplo. En un control se ofrecen cinco preguntas y cada estudiante debe escoger y responder exactamente tres. Si rinden el control 31 estudiantes, mostraremos que al menos cuatro escogieron las mismas preguntas.

Hay $\binom{5}{3} = 10$ formas de escoger las preguntas. Si cada una hubiera sido escogida por a lo más tres estudiantes, habrían rendido el control a lo más $3 \cdot 10 = 30$ estudiantes. Como hay 31, alguna elección fue escogida por al menos cuatro estudiantes.

Estas ideas nos llevan al principio del palomar generalizado.

Principio. Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$. Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ objetos.

Demostración. Si todas las cajas contuvieran menos de $\lceil m/k \rceil$ objetos, cada una contendría a lo más $\lceil m/k \rceil - 1$. El número total de objetos sería, entonces, a lo más $k(\lceil m/k \rceil - 1)$, lo que es menor que m . Esto contradice que se hayan distribuido los m objetos. $\square$

Ejemplo. Tenemos diez puntos en un cuadrado de lado 1. Mostraremos que tres de ellos están contenidos en un disco de radio $1/2$.

Notemos que las diagonales dividen el cuadrado en cuatro triángulos. Asignemos cada punto a uno de los triángulos que lo contienen, eligiendo uno solo cuando el punto esté en una frontera compartida. Por el principio del palomar generalizado, algún triángulo recibe al menos $\lceil \frac{10}{4} \rceil = 3$ puntos.

Cada uno de estos triángulos está contenido en el disco de radio $1/2$ cuyo centro es el punto medio del lado exterior correspondiente.

Ejemplo. Ramsey organiza una fiesta con seis personas. Mostraremos que siempre hay tres personas que se conocen mutuamente o tres que son mutuamente desconocidas.

Fijemos una persona p y clasifiquemos a las otras cinco en dos cajas: quienes conocen a p y quienes no la conocen. Una de las cajas contiene al menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ personas; llamémoslas a, b, c .

Si las tres conocen a p y algún par entre ellas se conoce, ese par junto con p forma un trío de conocidos mutuos. Si ningún par entre a, b, c se conoce, esas tres personas forman un trío de desconocidos mutuos. Si, en cambio, ninguna de a, b, c conoce a p , invertimos los papeles: un par que no se conoce forma con p un trío de desconocidos, y, si no hay tal par, a, b, c se conocen mutuamente.

Ejemplo. Cada punto en una grilla de 3×7 es coloreado de rojo o azul. Muestre que siempre existe un rectángulo cuyos vértices son puntos del mismo color.

Consideremos la grilla como tres filas y siete columnas. En cada columna, alguno de los dos colores aparece al menos $\lceil 3/2 \rceil = 2$ veces. Elijamos un par de filas en que ese color se repita y asignemos a la columna la etiqueta formada por ese par y ese color. Si hay más de una elección posible, escogamos una sola.

Hay $\binom{3}{2} \cdot 2 = 6$ etiquetas posibles para las siete columnas. Dos columnas reciben, por lo tanto, la misma etiqueta: en ambas, las dos filas indicadas tienen el color indicado. Sus cuatro intersecciones forman los vértices de un rectángulo de un solo color.

Ejemplo. En un grupo de diez personas hay exactamente 38 parejas de personas que se conocen. Mostremos que hay cuatro personas que se conocen mutuamente.

Consideremos los pares (C, P) , donde C es un grupo de cuatro personas y P es una pareja de personas de C que se conocen. Para cada una de las 38 parejas podemos elegir a las otras dos personas del grupo de $\binom{8}{2}$ formas. Luego, la cantidad de pares (C, P) es $38 \cdot \binom{8}{2} = 1064$.

Por otra parte, hay $\binom{10}{4} = 210$ grupos C . Tomemos los pares (C, P) como objetos y los grupos C como cajas, asignando cada par a su grupo. Por el principio del palomar generalizado, algún grupo contiene al menos $\lceil \frac{1064}{210} \rceil = 6$ parejas de conocidos. Pero un grupo de cuatro personas tiene solamente $\binom{4}{2} = 6$ parejas. Por lo tanto, las cuatro personas de ese grupo se conocen mutuamente.

3.3.5. Principio del palomar versión promedio

Podemos considerar una reformulación aún más general del principio del palomar. Dicha reformulación se conoce como el *principio del palomar versión promedio*.

Principio. Sean $n \geq 1$ un entero y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

En particular, algún término es menor o igual que el promedio y algún término es mayor o igual que él.

Demostración. Si $m = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$ y $M = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$, entonces $m \leq a_i \leq M$ para todo i . Sumando estas n desigualdades obtenemos

$$nm \leq a_1 + \cdots + a_n \leq nM.$$

Como $n > 0$, podemos dividir por n y obtener ambas desigualdades. $\square$

Para recuperar el principio del palomar generalizado, tomemos como a_i la cantidad de objetos en la caja i . Si hay N objetos en total, el promedio es N/n y alguna caja contiene al menos $\lceil N/n \rceil$ objetos, porque su cantidad de objetos es entera. Cuando $N > n$, el promedio es mayor que 1 y obtenemos la versión clásica.

El principio del palomar versión promedio presenta argumentos algo diferentes a los que hemos visto hasta ahora. En particular, no necesitaremos asignar objetos a cajas.¹

Ejemplo. Volvamos al control en que 31 estudiantes escogen tres de cinco preguntas. Mostraremos nuevamente que al menos cuatro escogieron las mismas preguntas.

Hay $\binom{5}{3} = 10$ elecciones posibles. Para cada una, contemos cuántos estudiantes la escogieron, incluyendo un cero si nadie lo hizo. Si estas cantidades son $c_1, \dots, c_{10}$, entonces

$$\frac{c_1 + \cdots + c_{10}}{10} = \frac{31}{10} > 3.$$

Alguna de ellas es mayor que 3 y, por ser entera, es al menos 4.

Ejemplo. Retomemos el problema de los $n \geq 2$ invitados sentados alrededor de una mesa redonda, ninguno en el puesto que le corresponde. Usaremos ahora el promedio para mostrar que algún giro deja al menos a dos invitados en sus puestos correctos. Para $r \in \{1, \dots, n-1\}$, sea c_r la cantidad de invitados que quedan en el puesto correcto después de girar la mesa r posiciones en un mismo sentido.

Cada invitado coincide con su puesto exactamente una vez entre los n giros, incluido el giro de cero posiciones. Como inicialmente ninguno está en su puesto, todas esas coincidencias ocurren entre los $n-1$ giros restantes. Por lo tanto, $c_1 + \cdots + c_{n-1} = n$ y el máximo de los c_r es al menos $n/(n-1) > 1$.

Ejemplo. Volvamos al grupo de diez personas con exactamente 38 parejas de conocidos. Queremos encontrar cuatro personas que se conozcan mutuamente.

Para cada grupo C de cuatro personas, sea a_C la cantidad de parejas de conocidos que contiene. Hay $\binom{10}{4} = 210$ grupos. Al sumar los a_C , cada pareja de conocidos aparece $\binom{8}{2}$ veces, pues podemos elegir a las otras dos personas del grupo entre las ocho restantes. Luego, el promedio sobre todos los grupos es

$$\frac{1}{\binom{10}{4}} \sum_C a_C = \frac{38 \binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{1064}{210} > 5.$$

¹Dicha ventaja hizo a E. W. Dijkstra escribir una defensa sobre esta interpretación: *The undeserved status of the pigeon-hole principle*, 21 de marzo de 1991, [EWD1094](#).

Algún grupo tiene más de cinco parejas de conocidos. Como solamente hay $\binom{4}{2} = 6$ parejas entre sus cuatro personas, todas se conocen mutuamente.

Ejemplo. Escribimos los números $1, 2, \dots, 20$ alrededor de un círculo, en cualquier orden. Mostraremos que tres números consecutivos suman al menos 32 y que otros tres números consecutivos suman a lo más 31.

Sean $a_1, \dots, a_{20}$ los números en el orden en que aparecen al recorrer el círculo, y escribamos $a_{21} = a_1$ y $a_{22} = a_2$. Las 20 sumas que nos interesan son

$$s_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}, \quad 1 \leq i \leq 20.$$

Cada número aparece en exactamente tres de estas sumas. En consecuencia,

$$\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} s_i = \frac{3}{20} \sum_{i=1}^{20} a_i = \frac{3}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = \frac{63}{2}.$$

Alguna suma es mayor o igual que $63/2$ y alguna es menor o igual que $63/2$. Como todas son enteras, la primera es al menos 32 y la segunda es a lo más 31.

Ejemplo. Tenemos $n \geq 1$ personas y n tareas, ambas numeradas de 1 a n . El costo de asignar la tarea j a la persona i es un número real a_{ij} . Queremos asignar una tarea a cada persona, sin repetir tareas. Si $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ es la suma de todos los costos, demostraremos que existe una asignación cuyo costo total es a lo más T/n y otra cuyo costo total es al menos T/n .

Una asignación queda descrita por una permutación σ de $[n]$: la persona i recibe la tarea $\sigma(i)$. Su costo es $C_\sigma = \sum_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$. Hay $n!$ asignaciones. En la suma de sus costos, cada entrada a_{ij} aparece exactamente $(n-1)!$ veces: una vez fijada la tarea j para la persona i , las demás tareas pueden asignarse a las demás personas de $(n-1)!$ maneras. Por tanto,

$$\sum_{\sigma \text{ permutación de } [n]} C_\sigma = (n-1)! T.$$

El costo promedio de las asignaciones es

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \text{ permutación de } [n]} C_\sigma = \frac{(n-1)! T}{n!} = \frac{T}{n}.$$

El principio del promedio da las dos asignaciones buscadas.

Ejercicios

1. a) Sean $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$. Demuestre combinatorialmente que

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} 2^{n-r}.$$

- b) Sea A un conjunto con $n \geq 1$ elementos. Demuestre (sin usar el teorema del binomio) que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

- c) Sean $p_1, \dots, p_r$ primos distintos, con $r \geq 1$. Se eligen $2^r + 1$ enteros positivos distintos cuyos factores primos son un subconjunto de $\{p_1, \dots, p_r\}$. Demuestre que el producto de dos de los números elegidos es un cuadrado perfecto.
- d) Sea $q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$. Se colorean con q colores los puntos de una grilla de $q+1$ filas y $q\binom{q+1}{2}+1$ columnas. Demuestre que existen dos filas y dos columnas cuyas cuatro intersecciones tienen el mismo color.
- e) Para $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, extendemos la notación $(a)_b$ a los números reales mediante

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_k = x(x-1) \cdots (x-k+1) \quad (k \geq 1).$$

Demuestre combinatorialmente que, para $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}.$$

2. Sea $n \geq 4$ un entero y $W_n = \{0, 1\}^n$. La *reducción* de una palabra w se obtiene reemplazando cada bloque maximal de símbolos consecutivos iguales por un solo símbolo. Por ejemplo, la reducción de 000110001 es 0101. Denotemos esta reducción por $\rho(w)$ y su largo por $r(w)$. Definimos una relación sobre W_n mediante

$$u \sim v \iff \rho(u) = \rho(v).$$

- a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- b) Muestre que hay $\frac{2^{n-1}}{n}$ palabras con la misma reducción.
- c) ¿Cuántas palabras hay en una clase de cuya reducción tiene largo r ? Use esto para probar combinatorialmente que

$$\sum_{r=1}^n 2 \binom{n-1}{r-1} = 2^n.$$

- d) Demuestre combinatorialmente que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{w \in W_n} x^{r(w)-1} = 2(1+x)^{n-1}.$$

Indicación: cuente los pares (w, λ) donde $w \in \{0, 1\}^n$ y λ asigna una de $x \in \mathbb{N}$ etiquetas a las posiciones donde w cambia de símbolo.

- e) Sea $X \subseteq W_n$ un subconjunto de $4n$ palabras. Muestre que X contiene tres palabras u, v, w tales que $\rho(u) = \rho(v) = \rho(w)$.

3. Sean $n, q \geq 2$ enteros y $W = \{1, \dots, q\}^n$. Para $u, v \in W$, definimos su *distancia de Hamming* como

$$d(u, v) = |\{i \in [n] : u_i \neq v_i\}|.$$

- a) ¿Cuántas palabras $v \in W$ hay a distancia k de una palabra fija $u \in W$?

b) Demuestre combinatorialmente la identidad

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} x^k = n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

- c) Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de W con $|\mathcal{C}| > q^{n-1}$. Muestre que existen $c, c' \in \mathcal{C}$ distintos con $d(c, c') \leq 1$.
- d) Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de W . Definimos $B_r(u) = \{v \in W : d(u, v) \leq r\}$ y $V_r = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} (q-1)^k$. Demuestre que existe $u \in W$ tal que

$$|\mathcal{C} \cap B_r(u)| \geq \left\lceil \frac{MV_r}{q^n} \right\rceil.$$

Deduzca que, si $MV_r > q^n$, existen $c, c' \in \mathcal{C}$ distintos con $d(c, c') \leq 2r$.

- e) Para cada $u \in W$, sea $T(u) = \sum_{c \in \mathcal{C}} d(u, c)$. Muestre que existen $u, v \in W$ tales que

$$T(u) \leq \frac{Mn(q-1)}{q} \leq T(v).$$