

3.4. Recurrencias y fórmulas explícitas

3.4.1. Recurrencias

En las secciones anteriores nos enfocamos en contar objetos desde principios de conteo (aditivo, multiplicativo e inclusión-exclusión) y sus consecuencias (objetos combinatoriales, demostraciones combinatoriales y existencia via palomar). En esta sección, desarrollaremos una técnica complementaria para contar objetos: las recurrencias. En vez de contar directamente los objetos dado un parámetro n , escribiremos una relación entre el número de objetos con parámetro n y el número de objetos con parámetros menores a n .

Definición. Una *(relación de) recurrencia* para una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es una relación que expresa a_n en términos de a_k para $k < n$.

Muchas veces la recurrencia vendrá acompañada de *condiciones iniciales*, que son valores específicos de a_k para algunos $k < n$.

Esto es particularmente útil cuando los objetos o cantidades involucradas tienen una estructura recursiva.

Ejemplo. Recordemos que los bitstrings de largo n tienen la siguiente estructura recursiva:

- ε es un bitstring.
- Si s es un bitstring, entonces $0s$ y $1s$ son bitstrings.

Por lo tanto, el número de bitstrings de largo n satisface la siguiente recurrencia:

$$b_n = 2 \cdot b_{n-1} \text{ para } n \geq 1, \quad \text{con } b_0 = 1.$$

Podemos usar estas recurrencias anteriores para calcular los primeros términos de la sucesión b_n , como se muestra en la tabla 3.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
b_n	1	2	4	8	16	32	64	...

Tabla 3.1: Número de bitstrings de largo n .

Si bien el ejemplo anterior es relativamente sencillo, usualmente para encontrar relaciones de recurrencias trataremos de *particionar* nuestro problema con respecto a alguna elección que nos permita usar el principio de la suma y reconocer términos de la sucesión con parámetros menores a n .

Ejemplo. Consideremos el problema de contar el número de formas de subir una escalera de n peldaños, si cada paso que damos puede ser de uno o dos peldaños. Para subir la escalera, podemos dar un primer paso de un peldaño y luego subir los $n - 1$ peldaños restantes, o podemos dar un primer paso de dos peldaños y luego subir los $n - 2$ peldaños restantes. Por lo tanto, el número de formas de subir la escalera satisface la siguiente recurrencia:

$$e_n = e_{n-1} + e_{n-2} \text{ para } n \geq 2, \quad \text{con } e_0 = 1 \text{ y } e_1 = 1.$$

Podemos reconocer en esta recurrencia una versión shifteada de la famosa sucesión de Fibonacci,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 2, \quad \text{con } f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1.$$

(Sus primeros términos se pueden ver en la tabla 3.2.)

n	0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
f_n	0	1	1	2	3	5	8	$\dots$

Tabla 3.2: Los primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

De esto, podemos deducir que $e_n = f_{n+1}$, es decir, el número de formas de subir la escalera de n peldaños es el $(n + 1)$ -ésimo número de Fibonacci.

Ejemplo. Consideremos el problema de contar el número de árboles binarios con n nodos: esto es, árboles en los que cada nodo tiene a lo sumo dos hijos, uno a la izquierda y otro a la derecha. Sea c_n el número de árboles binarios con n nodos, incluyendo el árbol vacío cuando $n = 0$.

Por ejemplo, para $n = 3$ hay exactamente cinco árboles binarios (ver figura 3.1).

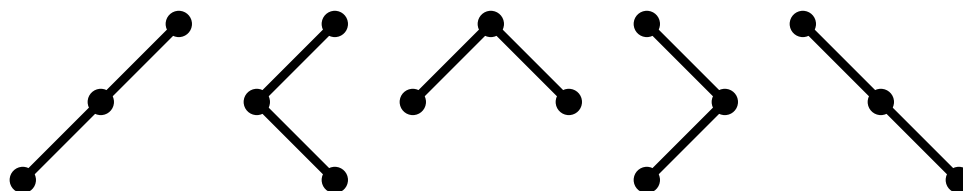


Figura 3.1: Los cinco árboles binarios con tres nodos.

Para obtener una recurrencia, notemos que un árbol binario no vacío con $n + 1$ nodos consiste en un nodo raíz, un subárbol binario con k nodos a la izquierda de la raíz, y un subárbol binario con $n - k$ nodos a la derecha de la raíz, para algún k entre 0 y n . Por lo tanto, la sucesión satisface la siguiente recurrencia:

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k \cdot c_{n-k} \quad \text{para } n \geq 0.$$

Aquí $c_0 = 1$ corresponde al árbol vacío; permitirlo hace que la descomposición anterior también funcione cuando alguno de los subárboles no tiene nodos. La solución a esta recurrencia se conoce como los *números de Catalán*. Sus primeros términos se pueden ver en la tabla 3.3.

n	0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
c_n	1	1	2	5	14	42	132	$\dots$

Tabla 3.3: Número de árboles binarios con n nodos.

Ejemplo. Un *camino de Dyck* de largo $2n$ es un camino que parte en altura 0, usa pasos diagonales $\nearrow$ y $\searrow$ que respectivamente suben y bajan una unidad de altura, nunca baja de altura 0, y termina nuevamente en altura 0. Sea d_n el número de caminos de Dyck de largo $2n$.

Para $n = 3$, hay cinco caminos de Dyck (ver figura 3.2).



Figura 3.2: Los cinco caminos de Dyck de largo 6.

Tenemos $d_0 = 1$, contando el camino vacío. Para $n \geq 0$, todo camino contado por d_{n+1} comienza con un paso $\nearrow$. Consideremos el paso $\searrow$ que lo devuelve por primera vez a altura 0. Si entre ese $\nearrow$ inicial y ese $\searrow$ hay $2k$ pasos, entonces esa parte intermedia, vista una unidad más abajo, es un camino de Dyck de largo $2k$. Después del primer retorno a altura 0 queda otro camino de Dyck de largo $2(n - k)$.

Por lo tanto, todo camino de Dyck no vacío se descompone de manera única como $\nearrow A \searrow B$, donde A es un camino de Dyck con k pares de pasos y B es un camino de Dyck con $n - k$ pares de pasos. Sumando sobre todos los valores posibles de k , obtenemos

$$d_0 = 1, \quad d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k} \quad \text{para } n \geq 0.$$

Esta es la misma recurrencia que obtuvimos para los números de Catalán, por lo que $d_n = c_n$.

3.4.2. Sistemas de recurrencias

A veces una sola sucesión no contiene toda la información necesaria para hacer el paso recursivo. En esos casos introducimos estados auxiliares y definimos varias sucesiones simultáneamente.

Definición. Un *sistema de recurrencias* es una colección de sucesiones definidas recursivamente de manera *simultánea*. Las ecuaciones de una sucesión pueden depender de los términos anteriores de las otras sucesiones del sistema.

Veamos un ejemplo donde aparece naturalmente un sistema de recurrencias.

Ejemplo. Sea p_n el número de strings ternarios de largo n con un número par de unos, y sea q_n el número de strings ternarios de largo n con un número impar de unos. Tratemos de encontrar un sistema de recurrencias para p_n y q_n .

Para $n = 0$, el string vacío tiene cero unos, así que $p_0 = 1$ y $q_0 = 0$. Para construir un string de largo $n + 1$, agregamos un símbolo al final:

- agregar 0 o 2 no cambia la paridad del número de unos;
- agregar 1 cambia la paridad.

Por lo tanto,

$$p_{n+1} = 2p_n + q_n, \quad q_{n+1} = 2q_n + p_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

El punto importante es que el sistema guarda exactamente el estado que necesitamos para describir el siguiente paso.

En lo que sigue veremos tres métodos elementales para obtener fórmulas explícitas a partir de recurrencias: inspección, expansión y cambio de variable.

3.4.3. Inspección

Si bien las recurrencias nos permiten calcular el número de objetos para cualquier tamaño¹, a menudo buscamos una fórmula explícita o cerrada que no dependa de los valores anteriores de la sucesión. Las fórmulas explícitas nos permiten entender mejor el comportamiento de la sucesión, y a menudo nos permiten calcular sus términos de manera más eficiente.

Nuestro primer método (y el más “primitivo”) para encontrar una fórmula explícita para a_n a partir de la recurrencia es la *inspección*. Esto consiste en “adivinar” una fórmula para a_n a partir de los primeros valores de la sucesión, y luego verificar que esta fórmula es efectivamente una solución a la recurrencia vía inducción.

Ejemplo. Ya nos encontramos con el juego de las *torres de Hanoi* en el Capítulo 2, pero lo recordamos acá. El juego consiste en tres varillas y n discos de diferentes tamaños apilados en una de las varillas, de mayor a menor. El objetivo del juego es mover los n discos a otra varilla, siguiendo las siguientes reglas:

- Solo se puede mover un disco a la vez.
- Cada movimiento consiste en tomar el disco superior de una de las varillas y colocarlo sobre otra varilla.
- No se puede colocar un disco sobre otro disco más pequeño.

Para $n = 3$, una solución óptima usa 7 movimientos, como se muestra en la Figura 3.3.

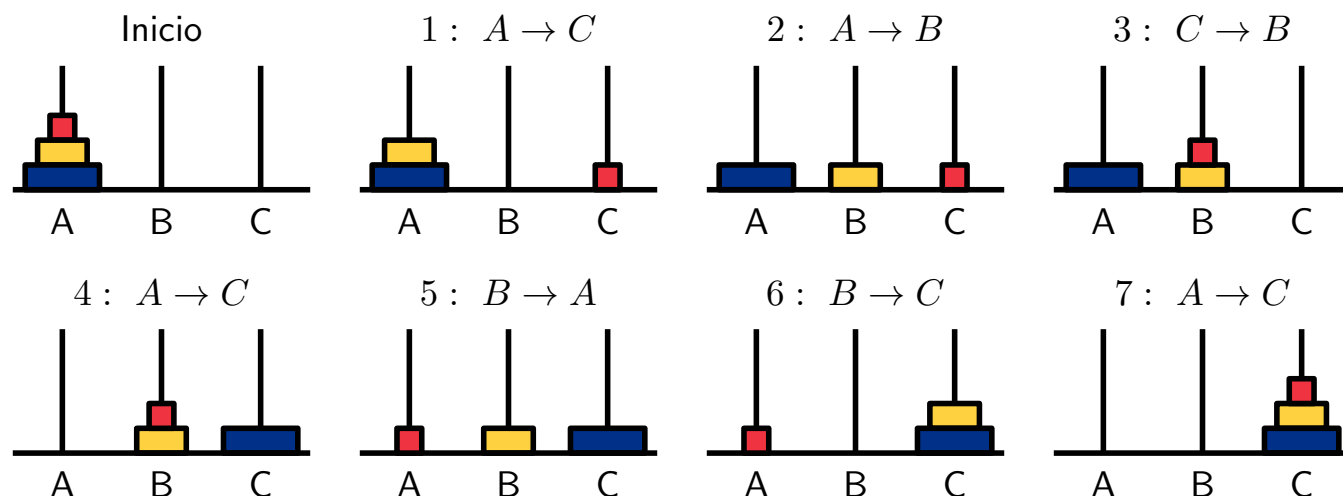


Figura 3.3: Una solución para las torres de Hanoi con tres discos.

Tratemos de encontrar una cota para el número de movimientos necesarios para resolver el juego con n discos. Para esto, notemos que para mover el disco más grande (el de abajo) a la varilla destino, primero debemos mover los $n - 1$ discos de arriba a la varilla auxiliar, luego mover el disco más grande a la varilla destino, y finalmente mover los $n - 1$ discos de la varilla auxiliar a la varilla

¹Incluso de manera eficiente vía programación dinámica.

destino. Esto nos da una estrategia recursiva cuyo número de movimientos h_n satisface la siguiente recurrencia:

$$h_n = 2 \cdot h_{n-1} + 1 \quad \text{con } h_0 = 0.$$

Tabulando los primeros valores de h_n obtenemos los valores mostrados en la tabla 3.4.

n	0	1	2	3	4	5	6	...
h_n	0	1	3	7	15	31	63	...

Tabla 3.4: Número de movimientos necesarios para resolver las torres de Hanoi con n discos.

Los valores de h_n nos sugieren que $h_n = 2^n - 1$. Verifiquemos que esta fórmula es efectivamente una solución a la recurrencia vía inducción.

- **Caso base:** Para $n = 0$, $h_0 = 0$ y $2^0 - 1 = 0$.
- **Hipótesis inductiva:** $h_n = 2^n - 1$.
- **Paso inductivo:** $h_{n+1} = 2 \cdot h_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

3.4.4. Expansión

Nuestro segundo método elemental para encontrar fórmulas explícitas a partir de recurrencias será el método de *expansión*. Este método consiste en “desenrollar” la recurrencia, es decir, escribir a_n en términos de a_{n-1} , luego escribir a_{n-1} en términos de a_{n-2} , y así sucesivamente, hasta llegar a los casos base.

El primer caso prototípico para este método son las recurrencias “tipo suma”, es decir, aquellas de la forma

$$a_n = a_{n-1} + f(n) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Para este tipo de recurrencias, podemos expandir a_n de la siguiente manera:ws

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_{n-1} + f(n) \\
 &= a_{n-2} + f(n-1) + f(n) \\
 &= a_{n-3} + f(n-2) + f(n-1) + f(n) \\
 &\vdots \\
 &= a_0 + \sum_{k=1}^n f(k).
 \end{aligned}$$

Esto reduce el problema de encontrar una fórmula explícita para a_n al problema de calcular la sumatoria $\sum_{k=1}^n f(k)$ que podemos atacar con las técnicas que conocemos.

Ejemplo. Supongamos que las personas llegan una por una a una reunión, y que cada nueva persona saluda exactamente una vez a todas las personas que ya llegaron. Sea s_n el número total de saludos después de que han llegado n personas.

Cuando llega la primera persona no ocurre ningún saludo. En general, cuando llega la persona número n , saluda a las $n - 1$ personas anteriores. Por lo tanto,

$$s_0 = 0, \quad s_n = s_{n-1} + (n - 1) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Expandiendo esta recurrencia obtenemos

$$s_n = s_0 + \sum_{k=1}^n (k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

Esto coincide con la interpretación combinatorial: cada saludo corresponde a elegir un par de personas.

Ejemplo. Usemos la técnica de expansión para atacar un problema geométrico: el *círculo de Moser*. Tenemos n puntos en un círculo, y trazamos todas las cuerdas entre estos puntos. Supondremos además que no hay tres cuerdas que se intersecten en un mismo punto interior. ¿Cuántas regiones se forman dentro del círculo con estas cuerdas? Algunos casos pequeños se muestran en la Figura 3.4.

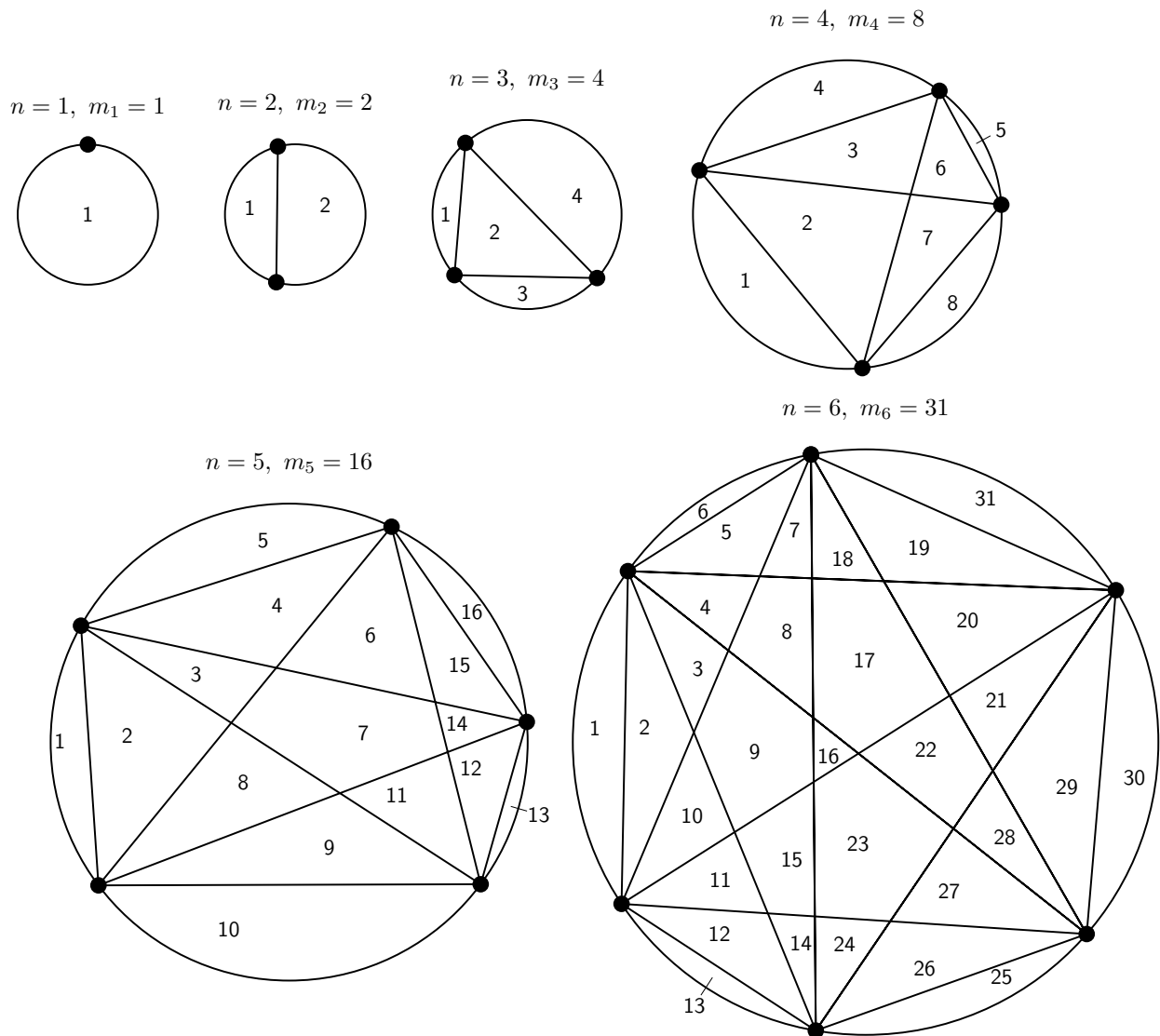


Figura 3.4: Casos pequeños del problema del círculo de Moser. Los números indican las regiones.

Una inspección de los términos de la sucesión hasta 5 nos sugiere *erróneamente* que $m_n = 2^{n-1}$, pero el caso $n = 6$ nos muestra los riesgos de realizar conjeturas a partir de pocos términos de la sucesión.

Sea m_n el número de regiones que se obtienen con n puntos. Veamos cuántas regiones nuevas se obtienen al agregar el punto n .

- **Aporte base de las cuerdas nuevas:** Al agregar el punto n , se agregan $n - 1$ cuerdas nuevas entre el punto n y los puntos anteriores. Al trazar una cuerda nueva, incluso si no tuviera intersecciones interiores, esta divide una región en dos. Por lo tanto, cada cuerda nueva aporta una región nueva de base. Es decir, se agregan $n - 1$ regiones nuevas.
- **Aporte de las intersecciones nuevas:** Si una cuerda nueva intersecta una cuerda antigua, queda cortada en un segmento adicional. Ese segmento adicional también divide una región en dos, por lo que cada intersección nueva aporta una región nueva adicional. ¿Cuántas intersecciones nuevas se agregan al agregar el punto n ? Notemos que al seleccionar tres puntos de los $n - 1$ puntos anteriores y el punto n se forma un cuadrilátero convexo. Las diagonales de este cuadrilátero representan exactamente una cuerda nueva y una cuerda antigua que se intersectan en un punto interior del círculo.

Como cada subconjunto de tres puntos define exactamente una nueva intersección y cada intersección es definida por exactamente un subconjunto de tres puntos, el número de intersecciones nuevas es exactamente el número de subconjuntos de tres puntos que se pueden seleccionar entre los $n - 1$ puntos anteriores, es decir, $\binom{n-1}{3}$.

(Ver la Figura 3.5 para una ilustración de estas ideas.)

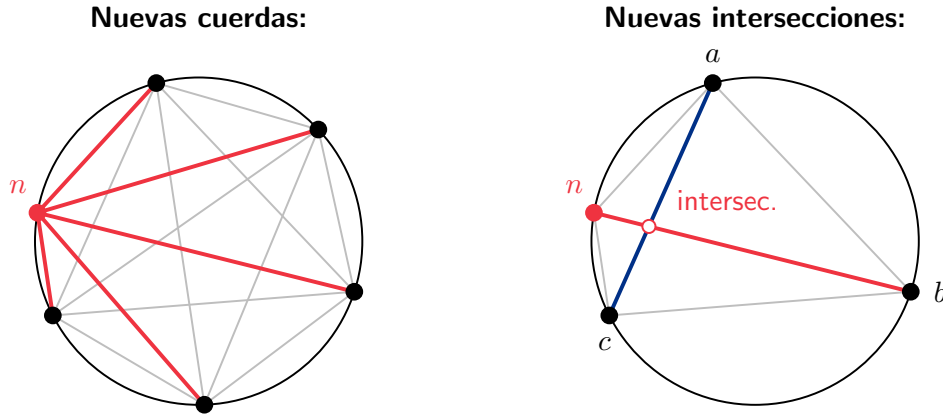


Figura 3.5: Al agregar el punto n , cada cuerda nueva aporta una región base, y cada triple de puntos antiguos produce una intersección nueva.

Hemos obtenido la siguiente recurrencia para m_n :

$$m_n = m_{n-1} + (n - 1) + \binom{n-1}{3} \text{ para } n \geq 2, \quad \text{con } m_1 = 1.$$

Expandiendo la recurrencia obtenemos

$$m_n = 1 + \sum_{k=2}^n (k - 1) + \sum_{k=2}^n \binom{k-1}{3} = 1 + \sum_{k=2}^n \binom{k-1}{1} + \sum_{k=2}^n \binom{k-1}{3} = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

Donde en la última igualdad usamos la identidad del palo de hockey de la sección anterior.

Un segundo caso típico para el método de expansión son las recurrencias “tipo producto”, es decir, aquellas de la forma

$$a_n = f(n) \cdot a_{n-1} \text{ para } n \geq 1.$$

Para este tipo de recurrencias, podemos expandir a_n de manera similar:

$$\begin{aligned} a_n &= f(n) \cdot a_{n-1} \\ &= f(n) \cdot f(n-1) \cdot a_{n-2} \\ &= f(n) \cdot f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot a_{n-3} \\ &\vdots \\ &= a_0 \cdot \prod_{k=1}^n f(k). \end{aligned}$$

Esto reduce el problema de encontrar una fórmula explícita para a_n al problema de calcular el producto $\prod_{k=1}^n f(k)$.

Ejemplo. Tenemos un grupo de $2n$ personas y queremos emparejarlas de manera perfecta, es decir, cada persona debe tener *exactamente* una pareja. ¿Cuántas formas distintas hay de hacer esto? Para $n = 3$, tenemos 15 formas distintas de emparejar a las 6 personas, como se muestra en la Figura 3.6.

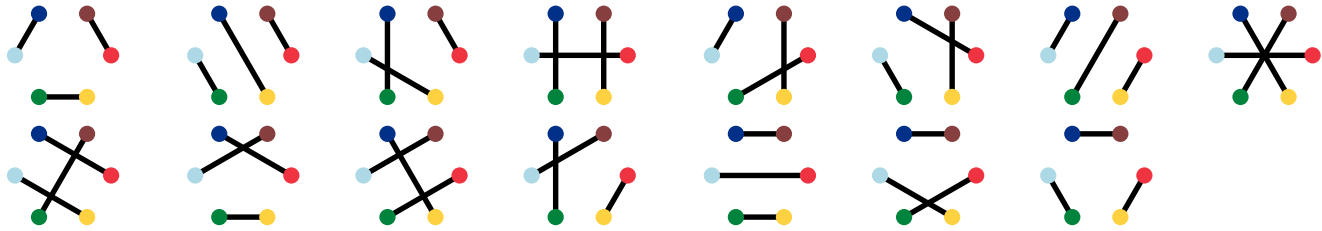


Figura 3.6: Los 15 emparejamientos perfectos posibles para 6 personas.

Definamos p_n como el número de formas distintas de emparejar perfectamente a $2n$ personas. Consideremos ahora a una persona en particular, digamos la persona 1. Esta persona puede emparejarse con cualquiera de las otras $2n - 1$ personas, lo que nos da $2n - 1$ opciones para emparejar a la persona 1. Una vez que hemos emparejado a la persona 1 con su pareja, nos quedan $2n - 2$ por emparejar, es decir, p_{n-1} formas distintas de emparejar a las personas restantes. Por tanto, tenemos la siguiente recurrencia para p_n :

$$p_n = (2n - 1) \cdot p_{n-1} \text{ para } n \geq 1, \quad \text{con } p_0 = 1.$$

Expandiendo esta recurrencia obtenemos

$$p_n = (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{k=1}^n (2k - 1)$$

Multiplicando y dividiendo por $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$ obtenemos

$$p_n = \frac{2n \cdot (2n - 1) \cdot 2(n - 1) \cdot (2n - 3) \cdots 2 \cdot 1}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

3.4.5. Cambio de variable

Nuestra tercera técnica elemental para encontrar fórmulas explícitas a partir de recurrencias será el método de *cambio de variable*. Este método consiste en definir una nueva sucesión b_n a partir de la sucesión a_n de manera que la recurrencia para b_n sea más fácil de resolver que la recurrencia para a_n . Una vez que encontramos una fórmula explícita para b_n , podemos usar la relación entre a_n y b_n para encontrar una fórmula explícita para a_n .

Ejemplo. Un virus se está propagando por una red. Cada minuto que pasa, la cantidad total de computadores afectados se cuadruplica. El equipo de ciberseguridad ha logrado desarrollar una estrategia de mitigación que logra limpiar y aislar exactamente 3 máquinas afectadas por minuto.

Si al minuto 0 hay 2 máquinas afectadas, el número de máquinas afectadas a_n al minuto n es dado por la siguiente recurrencia:

$$a_n = 4a_{n-1} - 3 \text{ para } n \geq 1, \quad a_0 = 2.$$

Notemos que la recurrencia no está muy lejos de ser una recurrencia tipo producto si no fuera por el término -3 . Busquemos un cambio de variable $b_n = a_n + c$ que nos permita eliminar dicho término, es decir, busquemos que

$$a_n + c = 4(a_{n-1} + c) \text{ para } n \geq 1.$$

Desarrollando la recurrencia en el lado izquierdo obtenemos

$$4a_{n-1} - 3 + c = 4a_{n-1} + 4c.$$

De aquí obtenemos que $c = -1$. Luego, al hacer el cambio de variable $b_n = a_n - 1$, obtenemos la siguiente recurrencia para b_n :

$$b_n = 4b_{n-1} \text{ para } n \geq 1, \quad b_0 = 1.$$

Esta es una recurrencia tipo producto, por lo que expandiéndola obtenemos $b_n = 4^n$. Finalmente, usando la relación entre a_n y b_n , obtenemos la fórmula explícita para a_n :

$$a_n = b_n + 1 = 4^n + 1.$$

De manera alternativa, podríamos haber apuntado a obtener una recurrencia tipo suma. Acá el objetivo hubiese sido eliminar el factor 4 en el lado derecho de la recurrencia, lo que nos hubiese llevado a buscar un cambio de variable $b_n = \frac{a_n}{4^n}$. Con este cambio de variable, obtenemos

$$b_n = \frac{a_n}{4^n} = \frac{a_{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{3}{4^n} = b_{n-1} - \frac{3}{4^n} \text{ para } n \geq 1, \quad b_0 = 2.$$

Expandiendo la recurrencia para b_n obtenemos

$$b_n = 2 - \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^k} = 2 - 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k}}_{\text{geométrica}} = 2 - 3 \cdot \frac{\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4^n})}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4^n}.$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la misma fórmula explícita para a_n :

$$a_n = 4^n b_n = 4^n \left(1 + \frac{1}{4^n} \right) = 4^n + 1.$$

Notemos que el método de cambio de variable es muy poderoso, y puede ser usado para resolver recurrencias que no son ni tipo suma ni tipo producto.

Ejemplo. Construimos una red de resistencias de la siguiente manera: para $n = 0$ tenemos una resistencia de 1Ω . En cada paso $n \geq 1$, tomamos la red construida en el paso $n - 1$ y le conectamos una nueva resistencia de 1Ω en paralelo. La Figura 3.7 muestra los primeros casos de esta construcción.

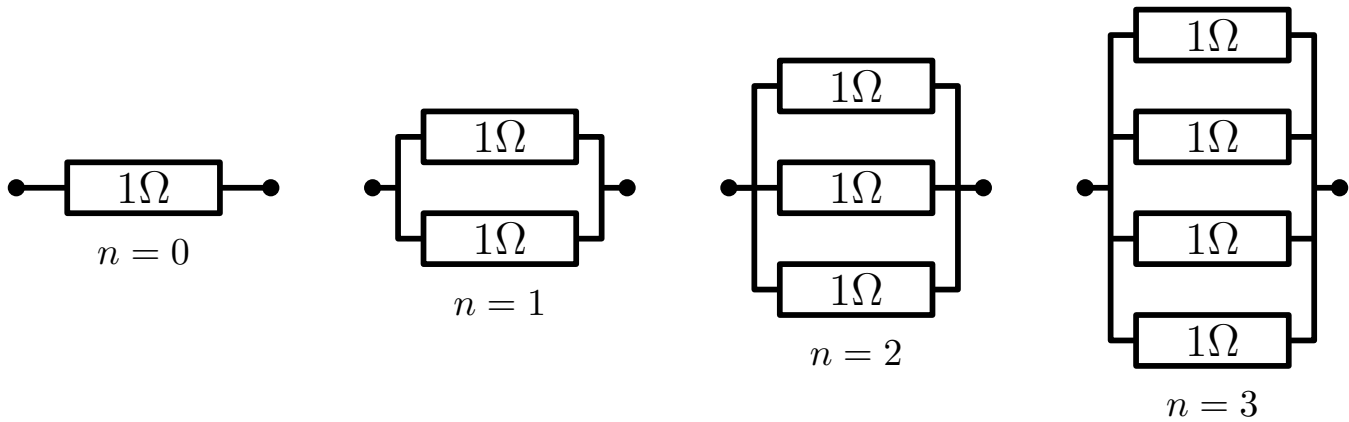


Figura 3.7: Primeros pasos de la construcción de la red de resistencias en paralelo.

Si r_n es la resistencia total de la red en el paso n , entonces la ley de Ohm y Kirchhoff nos dicen que

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{1}.$$

Si despejamos r_n obtenemos la siguiente recurrencia para r_n :

$$r_n = \frac{r_{n-1}}{r_{n-1} + 1} \text{ para } n \geq 1, \quad r_0 = 1.$$

Esta recurrencia no pareciera asemejarse a una de las recurrencias que hemos visto. Notemos, eso sí, que la ecuación original sugiere el cambio de variable $b_n = \frac{1}{r_n}$, con el que obtenemos la siguiente recurrencia para b_n :

$$b_n = b_{n-1} + 1 \text{ para } n \geq 1, \quad b_0 = 1.$$

Expandiendo la recurrencia obtenemos $b_n = n + 1$, y por tanto, deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la fórmula explícita $r_n = \frac{1}{n+1}$.

3.4.6. Ejercicios

1. a) Para $n \geq 0$, sea c_n el número de formas de cubrir un tablero de $1 \times n$ casillas con fichas indistinguibles de 1×2 y 1×1 , sin dejar huecos ni superponer fichas. Plantee una recurrencia para c_n .
- b) Para $n \geq 0$, sea d_n el número de formas de cubrir un tablero de $2 \times n$ casillas con fichas indistinguibles de 1×2 , sin dejar huecos ni superponer fichas. Plantee una recurrencia para d_n .

c) Resuelva la recurrencia

$$t_0 = 2, \quad t_1 = q - 1, \quad t_n = (q - 1)t_{n-1} + qt_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

d) Resuelva la recurrencia

$$s_0 = 0, \quad s_n = 2s_{n-1} + n^2 \quad (n \geq 1).$$

e) Sea $A \in \mathbb{R}$. Resuelva la recurrencia

$$x_0 = A, \quad x_n = (n + 1)x_{n-1} + (n + 1)! \quad (n \geq 1).$$

2. a) Una palabra es un *palíndromo* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Sea p_n el número de palíndromos de largo n sobre un alfabeto $\{1, \dots, q\}$. De una recurrencia para p_n y obtenga una fórmula explícita.
 - b) Una palabra tiene *única corrida de unos* si tiene al menos un uno, y todos los unos aparecen consecutivos. Sea u_n el número de palabras de largo n sobre un alfabeto $\{1, \dots, q\}$ que tienen única corrida de unos. De una recurrencia para u_n y obtenga una fórmula explícita.
 - c) Sea v_n el número de palabras de largo n sobre un alfabeto $\{1, \dots, q\}$ que contienen un único uno. De una recurrencia para v_n y obtenga una fórmula explícita.
3. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones y sea $(x_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por un valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ y la recurrencia

$$x_n = a_n x_{n-1} + b_n \quad (n \geq 1).$$

a) Use expansión para concluir que, para todo $n \geq 0$,

$$x_n = x_0 \prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \left(b_k \prod_{j=k+1}^n a_j \right).$$

b) Suponga ahora que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Busque una sucesión $(\mu_n)_{n \geq 0}$ de números no nulos, con $\mu_0 = 1$, tal que el cambio de variable $y_n = \mu_n x_n$ dé

$$y_n = y_{n-1} + \mu_n b_n.$$

Recupere la fórmula del inciso a) resolviendo la recurrencia de tipo suma.

c) Busque ahora un cambio de variable $z_n = x_n + c_n$. Fije $c_0 = 0$ y determine qué recurrencia debe satisfacer c_n para que

$$z_n = a_n z_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Recupere la fórmula del inciso a) resolviendo la recurrencia de tipo producto.

Consideremos ahora una recurrencia de orden $r \geq 2$, donde para todo $n \geq r$ se tiene

$$x_n = a_{n,1}x_{n-1} + \dots + a_{n,r}x_{n-r} + b_n$$

con coeficientes reales y valores iniciales $x_0, \dots, x_{r-1}$.

d) Defina

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-r+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r.$$

Construya una matriz A_n de tamaño $r \times r$ tal que para $n \geq r$ se tenga

$$\mathbf{u}_n = A_n \mathbf{u}_{n-1} + b_n \mathbf{e}_1.$$

e) Para $n \geq k \geq r - 1$, defina $\Phi_{n,k}$ como el producto de matrices $A_n A_{n-1} \cdots A_{k+1}$, y defina $\Phi_{k,k} = I_r$, donde I_r es la matriz identidad de tamaño $r \times r$. Demuestre que para $n \geq r - 1$ se tiene

$$\mathbf{u}_n = \Phi_{n,r-1} \mathbf{u}_{r-1} + \sum_{k=r}^n \Phi_{n,k} b_k \mathbf{e}_1.$$

Explique cómo obtener x_n de esta fórmula.

f) ¿Puede obtener análogos del inciso b) y del inciso c) para la recurrencia de orden r ?