

3.5. Funciones generatrices ordinarias

3.5.1. Funciones generatrices ordinarias y sus operaciones

Hasta ahora hemos descrito sucesiones de varias maneras: listando sus primeros términos, dando una recurrencia, o encontrando una fórmula explícita. Por ejemplo, la sucesión que vimos para las torres de Hanoi puede aparecer de las siguientes formas:

$$0, 1, 3, 7, 15, 31, \dots, \quad h_0 = 0, \quad h_{n+1} = 2h_n + 1, \quad h_n = 2^n - 1.$$

Las funciones generatrices nos ofrecen una nueva descripción. La idea acá es empaquetar la información de la sucesión en una expresión algebraica, de modo que las operaciones sobre esa expresión nos den información sobre los coeficientes.

Definición. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión. La *función generatriz ordinaria* de $(a_n)_{n \geq 0}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Escribiremos $[x^n]A(x) = a_n$ para indicar el coeficiente de x^n en $A(x)$.

Ejemplo. Algunas sucesiones que ya conocemos comienzan con las siguientes funciones generatrices:

$$\begin{aligned} H(x) &= x + 3x^2 + 7x^3 + 15x^4 + 31x^5 + \dots && (\text{Torres de Hanoi}), \\ F(x) &= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots && (\text{Fibonacci}), \\ C(x) &= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \dots && (\text{Catalán}). \end{aligned}$$

La función generatriz nos dará un objeto algebraico con el cual podremos trabajar para obtener información sobre los términos de la sucesión.

Para describir sucesiones que solo tienen algunos términos no nulos, introduciremos una notación pequeña que nos permite escribir una condición dentro de una suma.

Definición. Para una proposición P , definimos el *corchete de Iverson* $[P]$ como

$$[P] = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es verdadera,} \\ 0 & \text{si } P \text{ es falsa.} \end{cases}$$

Ejemplo. Si $a_n = [n = 0]$, entonces el único término no nulo de $A(x)$ es el término constante, es decir, $A(x) = 1$. Si $a_n = [n = t]$ para algún $t \in \mathbb{N}$, entonces el único término no nulo de $A(x)$ es el término x^t , es decir, $A(x) = x^t$.

Recalcamos que en la definición de función generatriz, x es una variable formal, y no un número real. Por lo tanto, no nos haremos preguntas sobre la convergencia de la serie, ni sobre su valor para algún x específico. Operaremos con estas series como si fueran polinomios con infinitos términos. Para esto, tenemos las siguientes reglas de operación de funciones generatrices.

Definición. Sean $A(x)$ y $B(x)$ las funciones generatrices ordinarias de las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ y $(b_n)_{n \geq 0}$, respectivamente. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n, \\ \lambda A(x) &= \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n, \\ x^k A(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+k} = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n. \end{aligned}$$

Las operaciones de suma y multiplicación por un escalar corresponden a sumar y multiplicar las sucesiones término a término. La última operación es un desplazamiento hacia la derecha: multiplicar por x^k agrega k coeficientes iniciales iguales a 0. Por ejemplo, si $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, entonces

$$x^2 A(x) = 0 + 0x + a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$

Dichas operaciones asocian y distribuirán como lo hacen los polinomios, y nos permitirán manipular funciones generatrices de manera algebraica.

Ejemplo. Consideremos la sucesión constante $a_n = 1$ para todo $n \geq 0$. Si $A(x)$ es su función generatriz, entonces

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} x^n.$$

Multiplicando por x obtenemos $xA(x) = \sum_{n \geq 1} x^n = A(x) - 1$. Por lo tanto, $(1 - x)A(x) = 1$ y podemos concluir que

$$A(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

En adelante usaremos esta identidad como una identidad de series formales:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Ejemplo. De la serie geométrica podemos obtener varias funciones generatrices básicas. Si $a_n = c$ para todo $n \geq 0$, entonces

$$\sum_{n \geq 0} cx^n = \frac{c}{1 - x}.$$

Si $a_n = r^n$, entonces

$$\sum_{n \geq 0} r^n x^n = \sum_{n \geq 0} (rx)^n = \frac{1}{1 - rx}.$$

En particular, la sucesión $1, -1, 1, -1, \dots$ tiene función generatriz $\frac{1}{1+x}$.

Ejemplo. Si $a_n = [d \mid n]$ con $d \in \mathbb{N}$ y $d \geq 1$, entonces

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} [d \mid n] x^n = \sum_{k \geq 0} x^{dk} = \sum_{k \geq 0} (x^d)^k = \frac{1}{1 - x^d}.$$

Ejemplo. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y consideremos la sucesión $a_n = \binom{m}{n}$, usando la convención de que $\binom{m}{n} = 0$ si $n > m$. Su función generatriz es un polinomio:

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n = (1 + x)^m.$$

Aquí solo usamos el teorema del binomio usual. Más adelante, podremos extender esta idea a exponentes que no son enteros positivos.

3.5.2. Resolución de recurrencias con funciones generatrices

Una aplicación central de las funciones generatrices es resolver recurrencias. Acá, la idea es tratar de deducir una ecuación algebraica para la función generatriz a partir de la recurrencia. Luego, si tenemos suerte, podremos reconocer la función generatriz obtenida como una función generatriz conocida.

Ejemplo. Sea $(h_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por

$$h_0 = 0, \quad h_{n+1} = 2h_n + 1 \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Definamos $H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n$. Multiplicamos la recurrencia por x^{n+1} y sumamos para $n \geq 0$:

$$\sum_{n \geq 0} h_{n+1} x^{n+1} = 2 \sum_{n \geq 0} h_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} x^{n+1}.$$

El lado izquierdo es

$$\sum_{n \geq 0} h_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} h_n x^n = H(x) - h_0 = H(x).$$

En el lado derecho aparecen directamente $xH(x)$ y la serie geométrica:

$$2 \sum_{n \geq 0} h_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} x^{n+1} = 2xH(x) + \frac{x}{1 - x}.$$

Por lo tanto,

$$H(x) = 2xH(x) + \frac{x}{1 - x}.$$

Despejando,

$$H(x) = \frac{x}{(1 - x)(1 - 2x)}.$$

Ahora necesitamos recuperar los coeficientes de $H(x)$. Para esto reescribimos la fracción como suma de series geométricas que conocemos. Esto lo hacemos vía *fracciones parciales*. Buscamos constantes α y β tales que

$$\frac{x}{(1 - x)(1 - 2x)} = \frac{\alpha}{1 - x} + \frac{\beta}{1 - 2x}.$$

Al multiplicar por $(1-x)(1-2x)$ obtenemos

$$x = \alpha(1-2x) + \beta(1-x) = (\alpha + \beta) + (-2\alpha - \beta)x.$$

Comparando coeficientes, $\alpha + \beta = 0$ y $-2\alpha - \beta = 1$, así que $\alpha = -1$ y $\beta = 1$. Luego

$$H(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = -\sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \sum_{n \geq 0} (2^n - 1)x^n.$$

Por lo tanto, $h_n = 2^n - 1$ para todo $n \geq 0$.

El método anterior es bastante sistemático y se puede resumir en los siguientes pasos.

- Definir $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Multiplicar la recurrencia por una potencia conveniente de x (usualmente, si el mayor índice de la recurrencia es $n+k$, multiplicar por x^{n+k}).
- Sumar sobre los índices donde la recurrencia es válida.
- Reescribir todo en términos de $A(x)$ y despejar.
- Expandir $A(x)$ como una serie conocida y leer sus coeficientes.

El último paso suele ser el menos automático: muchas veces necesitamos reescribir la función generatriz usando identidades conocidas o vía fracciones parciales si es una función racional (esto es, el cociente de dos polinomios).

Ejemplo. Sea $(f_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de Fibonacci:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Definamos $F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$. Multiplicando la recurrencia por x^{n+1} y sumando desde $n = 1$, obtenemos

$$\sum_{n \geq 1} f_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} f_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 1} f_{n-1} x^{n+1}.$$

El lado izquierdo es

$$\sum_{n \geq 1} f_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 2} f_n x^n = F(x) - f_0 - f_1 x = F(x) - x.$$

El lado derecho es

$$x \sum_{n \geq 1} f_n x^n + x^2 \sum_{n \geq 1} f_{n-1} x^{n-1} = x(F(x) - f_0) + x^2 F(x) = xF(x) + x^2 F(x).$$

Así,

$$F(x) - x = xF(x) + x^2 F(x), \quad \text{y por lo tanto} \quad F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Para expandir esta función, primero factoricemos el denominador. Sus raíces se obtienen resolviendo

$$1 - x - x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Es conveniente escribir estas raíces como $\frac{1}{\phi}$ y $\frac{1}{\psi}$, donde

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

En efecto, $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ y $\frac{1}{\psi} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Como el término constante de $1 - x - x^2$ es 1, obtenemos

$$1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x).$$

Ahora buscamos constantes α y β tales que

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\alpha}{1 - \phi x} + \frac{\beta}{1 - \psi x}.$$

Multiplicando por $(1 - \phi x)(1 - \psi x)$,

$$x = \alpha(1 - \psi x) + \beta(1 - \phi x) = (\alpha + \beta) - (\alpha\psi + \beta\phi)x.$$

Por lo tanto, $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha\psi + \beta\phi = -1$. De esto obtenemos $\alpha = \frac{1}{\phi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Luego

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi x} - \frac{1}{1 - \psi x} \right).$$

Como cada término es una serie geométrica,

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

Por lo tanto,

$$f_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

El ejemplo de Fibonacci muestra una ventaja práctica del método de funciones generatrices: una vez que la recurrencia se traduce a una ecuación algebraica, el resto del trabajo se concentra en reconocer o expandir la función generatriz obtenida.

Veamos un ejemplo de orden superior, donde la recurrencia involucra tres términos anteriores.

Ejemplo. Consideremos la sucesión definida por

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} \quad (n \geq 3).$$

Sea $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Multiplicando la recurrencia por x^n y sumando para $n \geq 3$, obtenemos para el lado izquierdo

$$\sum_{n \geq 3} a_n x^n = A(x) - 3 - 2x - 6x^2,$$

para el lado derecho obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 3} (2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3})x^n &= 2x \sum_{n \geq 3} a_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geq 3} a_{n-2}x^{n-2} - 2x^3 \sum_{n \geq 3} a_{n-3}x^{n-3} \\
&= 2x \sum_{n \geq 2} a_n x^n + x^2 \sum_{n \geq 1} a_n x^n - 2x^3 \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\
&= 2x(A(x) - 3 - 2x) + x^2(A(x) - 3) - 2x^3 A(x) \\
&= A(x)(2x + x^2 - 2x^3) - 6x - 4x^2 - 3x^2
\end{aligned}$$

Despejando y factorizando obtenemos

$$A(x) = \frac{3 - 4x - x^2}{1 - 2x - x^2 + 2x^3} = \frac{3 - 4x - x^2}{(1-x)(1+x)(1-2x)}.$$

Hagamos fracciones parciales para expandir esta función. Buscamos constantes α, β, γ tales que

$$A(x) = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} + \frac{\gamma}{1-2x}.$$

Al multiplicar por el denominador obtenemos la identidad de polinomios

$$\begin{aligned}
3 - 4x - x^2 &= \alpha(1+x)(1-2x) + \beta(1-x)(1-2x) + \gamma(1-x)(1+x) \\
&= (\alpha + \beta + \gamma) + (-2\alpha - \beta - \gamma)x + (-2\beta + \gamma)x^2.
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 3, \\
-2\alpha - \beta - \gamma &= -4, \\
-2\beta + \gamma &= -1.
\end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 1$. Luego,

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-2x} = \sum_{n \geq 0} (1 + (-1)^n + 2^n)x^n.$$

Por lo tanto, $a_n = 1 + (-1)^n + 2^n$ para todo $n \geq 0$.

Ejemplo. Queremos teselar un tablero de tamaño $1 \times n$ usando cuadrados de tamaño 1×1 y dominós de tamaño 1×2 . No se permiten dos dominós consecutivos, es decir, no puede aparecer un dominó inmediatamente después de otro dominó. Sea a_n la cantidad de teselaciones válidas de un tablero $1 \times n$. Encontremos una fórmula para a_n (consideraremos que $a_0 = 1$). Las primeras cantidades son

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 4.$$

En efecto, si C representa un cuadrado y D un dominó tenemos las siguientes teselaciones válidas

$$\begin{aligned}
n = 1 & \quad C \\
n = 2 & \quad CC, D \\
n = 3 & \quad CCC, CD, DC \\
n = 4 & \quad CCCC, CCD, CDC, DCC.
\end{aligned}$$

Para $n \geq 3$, separamos según cómo termina la teselación.

Si termina en un cuadrado C , entonces antes de ese cuadrado hay una teselación válida de un tablero de largo $n - 1$. Esto da a_{n-1} posibilidades.

Si termina en un dominó D , entonces, como no se permiten dos dominós consecutivos, el bloque inmediatamente anterior debe ser un cuadrado. Por lo tanto la teselación termina en CD . Antes de este bloque de largo 3 hay una teselación válida de un tablero de largo $n - 3$. Esto da a_{n-3} posibilidades.

Por lo tanto,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3}.$$

Sea $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Multiplicando la recurrencia por x^n y sumando sobre $n \geq 3$ obtenemos

$$\sum_{n \geq 3} a_n x^n = x \sum_{n \geq 3} a_{n-1} x^{n-1} + x^3 \sum_{n \geq 3} a_{n-3} x^{n-3}.$$

Usando los casos bases, obtenemos que el lado izquierdo es

$$\sum_{n \geq 3} a_n x^n = A(x) - 1 - x - 2x^2.$$

Reindexando las sumas y usando los casos bases, obtenemos que el lado derecho es

$$\begin{aligned} x \sum_{n \geq 3} a_{n-1} x^{n-1} + x^3 \sum_{n \geq 3} a_{n-3} x^{n-3} &= x \sum_{n \geq 2} a_n x^n + x^3 \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ &= x(A(x) - 1 - x) + x^3 A(x). \end{aligned}$$

Juntando los términos $A(x)$, la ecuación nos queda

$$A(x)(1 - x - x^3) = -x - x^2 + 1 + x + 2x^2 = 1 + x^2.$$

Despejando $A(x)$ concluimos lo pedido

$$A(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x - x^3}.$$

Usando la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - x(1 + x^2)} = \sum_{r \geq 0} x^r (1 + x^2)^r.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 + x^2) \sum_{r \geq 0} x^r (1 + x^2)^r \\ &= \sum_{r \geq 0} x^r (1 + x^2)^{r+1}. \end{aligned}$$

Usando el teorema del binomio en $(1 + x^2)^{r+1}$ obtenemos

$$A(x) = \sum_{r \geq 0} \sum_{k \geq 0} \binom{r+1}{k} x^{r+2k}.$$

Para obtener el coeficiente de x^n , necesitamos que $r + 2k = n$. Por lo tanto, $r = n - 2k$. Sustituyendo esto en el coeficiente binomial, obtenemos

$$\begin{aligned} a_n &= [x^n]A(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n-2k+1}{k}. \end{aligned}$$

Para cerrar, agruparemos algunas funciones generatrices que ya aparecieron o que se deducen directamente de las operaciones anteriores.

Proposición (Catálogo de FGO). Las siguientes identidades valen como identidades de funciones generatrices ordinarias:

- Si $a_n = c$, entonces $A(x) = \frac{c}{1-x}$.
- Si $a_n = (-1)^n$, entonces $A(x) = \frac{1}{1+x}$.
- Si $a_n = r^n$, entonces $A(x) = \frac{1}{1-rx}$.
- Si $a_n = \binom{m}{n}$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo y $\binom{m}{n} = 0$ para $n > m$, entonces $A(x) = (1+x)^m$.
- Si $a_n = [n=0]$, entonces $A(x) = 1$.
- Si $a_n = [n=t]$, con $t \in \mathbb{N}$, entonces $A(x) = x^t$.
- Si $a_n = [d|n]$, con $d \in \mathbb{N}$ y $d \geq 1$, entonces $A(x) = \frac{1}{1-x^d}$.

3.5.3. Ejercicios

1. Encuentre la función generatriz ordinaria de cada sucesión.

- a) $a_n = \alpha \cdot r^n - \beta$ para $n \geq 0$, donde $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$.
- b) $b_n = \alpha \binom{m}{n} + \beta$ para $n \geq 0$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$.
- c) Una alarma se activa en los tiempos múltiplos de 3 y además se activa dos veces en el tiempo 5. Sea c_n el número de activaciones en el tiempo n .

Sea $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Expresé en términos de $A(x)$ la función generatriz de cada sucesión.

- d) $b_0 = b_1 = 0$ y $b_n = a_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- e) $c_n = a_{n+1}$ para $n \geq 0$.
- f) $d_0 = 5$ y $d_n = a_n$ para $n \geq 1$.

2. Decimos que una palabra sobre el alfabeto $\{a, b, c, d\}$ es *codificada* si se puede obtener concatenando bloques de los siguientes tipos: $[a]$, $[b]$, $[cd]$. Por ejemplo, $acdba$ es codificada, pues se descompone como

$$[a] [cd] [b] [a],$$

mientras que $acdbd$ no es codificada.

Sea a_n la cantidad de palabras codificadas de largo n (considere que $a_0 = 1$).

a) Calcule a_1 y a_2 .

b) Demuestre que, para $n \geq 2$,

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

c) Sea $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Demuestre que

$$A(x) = \frac{1}{1 - 2x - x^2} = \frac{1}{1 - x(2 + x)}.$$

d) Use el inciso anterior para concluir que

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

e) Use fracciones parciales para obtener una fórmula cerrada para a_n .

3. Una función generatriz $A(x)$ es *racional* si se puede escribir como $A(x) = P(x)/Q(x)$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(0) \neq 0$.

Mostraremos en este problema que la función generatriz de una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es racional si y solo si existen enteros $N \geq k \geq 1$ y constantes $c_1, \dots, c_k$ tales que

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

a) Suponga que $A(x)$ es racional, y escriba $A(x) = P(x)/Q(x)$ con $Q(0) \neq 0$.

- i) Muestre que puede asumir sin pérdida de generalidad que $Q(x) = 1 - c_1 x - \dots - c_k x^k$ para algunas constantes $c_1, \dots, c_k$.
- ii) ¿Cuál es el coeficiente de x^n en $Q(x)A(x)$?
- iii) Concluya que $(a_n)_{n \geq 0}$ satisface

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

para todo $n \geq N$, donde N es suficientemente grande.

b) Recíprocamente, suponga que $(a_n)_{n \geq 0}$ satisface

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

- 1) Defina $Q(x) = 1 - c_1 x - \dots - c_k x^k$. Pruebe que si $n \geq N$, el coeficiente de x^n en $Q(x)A(x)$ es cero.
- 2) Concluya que $A(x)$ es racional.