

3.6. Convolución y binomio generalizado

3.6.1. Convolución de sucesiones y producto de funciones generatrices

Para ampliar nuestro catálogo de funciones generatrices ordinarias, necesitamos una operación que nos permita combinar funciones generatrices conocidas para obtener funciones generatrices de sucesiones más complicadas. Esta operación será el producto de funciones generatrices. La sucesión que aparece en los coeficientes de este producto se llama convolución.

Definición. Sean $a = (a_n)_{n \geq 0}$ y $b = (b_n)_{n \geq 0}$ dos sucesiones. Su *convolución* es la sucesión $a \star b = (c_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$c_n = (a \star b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Escribiremos también $a_n \star b_n$ como abreviación de $(a \star b)_n$.

A pesar de la notación $a_n \star b_n$ hay que recordar que la convolución es una operación entre sucesiones, no entre términos individuales.

La convolución tiene una interpretación combinatorial natural y ya nos apareció en los números de Catalán. Supongamos que podemos construir objetos de tamaño n de tipo $\mathcal{A}$ de a_n formas, y objetos de otro tipo $\mathcal{B}$ de b_n formas. Entonces, las formas de construir un objeto compuesto por un objeto de tipo $\mathcal{A}$ y otro de tipo $\mathcal{B}$ con tamaño total n son $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$: si el objeto de tipo $\mathcal{A}$ tiene tamaño k , entonces el de tipo $\mathcal{B}$ tiene tamaño $n - k$, y hay $a_k b_{n-k}$ formas de construir ambos objetos.

Proposición. Sean

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

Entonces

$$A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n \star b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Es decir, el producto $A(x)B(x)$ es la función generatriz de la convolución de las dos sucesiones.

Demostración. Notemos que

$$a_k x^k B(x) = a_k x^k \sum_{j \geq 0} b_j x^j = \sum_{n \geq k} a_k b_{n-k} x^n.$$

Por lo tanto,

$$A(x)B(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k B(x) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k} a_k b_{n-k} x^n.$$

Para escribir las sumas que siguen, extendemos la sucesión poniendo $b_j = 0$ para $j < 0$. Intercambiando el orden de las sumas, obtenemos

$$A(x)B(x) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} [n \geq k] a_k b_{n-k} x^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} [n \geq k] a_k b_{n-k} x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n. \quad \square$$

Ejemplo. Tratemos de encontrar la función generatriz de la sucesión $a_n = n + 1$. Notemos que $n + 1 = \sum_{k=0}^n 1 \cdot 1$. Es decir, $(a_n)_{n \geq 0}$ es la convolución de la sucesión constante 1 consigo misma. Si $u = (1, 1, \dots)$, esto se escribe $a_n = (u \star u)_n$. Como la función generatriz de la sucesión constante 1 es $\frac{1}{1-x}$, obtenemos

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n = \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

La convolución también aparece naturalmente en recurrencias donde los términos de la sucesión se multiplican entre sí.

Ejemplo. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por $a_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$2a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = (n+1)2^n.$$

Esta recurrencia contiene productos de términos de la sucesión. Como $a_0 = 1$, podemos reescribirla de manera más simétrica como

$$a_n \star a_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = (n+1)2^n \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

En efecto, para $n \geq 1$ los términos $k = 0$ y $k = n$ aportan $a_0 a_n + a_n a_0 = 2a_n$, y para $n = 0$ ambos lados valen 1.

Definamos $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Multiplicando por x^n y sumando sobre $n \geq 0$, obtenemos

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n = \sum_{n \geq 0} (n+1)2^n x^n.$$

Por la fórmula del producto, el lado izquierdo es $A(x)^2$. Por otra parte, $(n+1)2^n = \sum_{k=0}^n 2^k 2^{n-k}$, así que

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)2^n x^n = \left(\sum_{n \geq 0} 2^n x^n \right)^2 = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Luego

$$A(x)^2 = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Las dos series $\frac{1}{1-2x}$ y $-\frac{1}{1-2x}$ tienen ese cuadrado, pero solo la primera tiene término constante 1. Como $a_0 = 1$, concluimos que

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} \quad \text{y por lo tanto} \quad a_n = 2^n.$$

Ejemplo. Si $a_n = \binom{n+m-1}{n}$, con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ fijo, entonces $A(x) = \frac{1}{(1-x)^m}$.

Demostración. Probaremos esta identidad por inducción sobre m .

- **Caso base:** Si $m = 1$, entonces $a_n = \binom{n}{n} = 1$ y $A(x) = \frac{1}{1-x}$.

- **Hipótesis inductiva:** Supongamos que $a_n = \binom{n+m-1}{n}$ tiene función generatriz $A(x) = \frac{1}{(1-x)^m}$.
- **Paso inductivo:** Notemos que

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \frac{1}{1-x} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1-x)^m}}_{\text{H.I.}} = \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \binom{n+m-1}{n} x^n \right).$$

Por la fórmula de convolución, el coeficiente de x^n en esta función generatriz es

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+m-1}{k} = \binom{n+m}{n}.$$

Para justificar la igualdad, contemos las formas de distribuir n objetos idénticos en $m+1$ cajas. El lado derecho cuenta esto por la fórmula de multiconjuntos. Para el lado izquierdo, fijamos k como el número de objetos que van a las primeras m cajas; esos k objetos se distribuyen de $\binom{k+m-1}{k}$ formas, y la última caja recibe los $n-k$ objetos restantes. Sumando sobre $k = 0, \dots, n$, obtenemos el lado izquierdo. Por lo tanto, $\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ es la FGO de la sucesión $a_n = \binom{n+m}{n}$, que es la fórmula deseada para $m+1$. $\square$

3.6.2. El teorema del binomio generalizado

Via la convolución, pudimos obtener un teorema del binomio para exponentes enteros negativos. En efecto, el último ejemplo estableció que

$$(1-x)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+m-1}{n} x^n$$

Esto es similar a las funciones generatrices que ya conocemos via el teorema del binomio, sólo que esta vez el exponente es un número negativo.

Trataremos de introducir una versión generalizada del teorema del binomio para exponentes reales. Para esto, introduciremos una versión generalizada del coeficiente binomial.

Definición. Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos el *coeficiente binomial generalizado* como

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2) \cdots (r-k+1)}{k!},$$

con la convención $\binom{r}{0} = 1$.

Cuando r es un entero no negativo, esta definición coincide con los coeficientes binomiales usuales. Pero, como r puede ser cualquier número real, esta definición nos da sentido a expresiones como $\binom{1/2}{3}$ o $\binom{-2}{3}$.

Ejemplo. Para $r = 1/2$ y $k = 3$,

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{1}{16}.$$

Para $r = -2$ y $k = 3$,

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4.$$

El coeficiente binomial generalizado hereda alguna de las propiedades de los coeficientes binomiales usuales, como podemos ver a continuación.

Proposición. Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \geq 1$, se cumplen las siguientes identidades:

1. $k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$.
2. $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$.

Demostración. Para la primera,

$$k \binom{r}{k} = \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{(k-1)!} = r \binom{r-1}{k-1}.$$

Para la segunda,

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \frac{(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!} ((r-k) + k) = \binom{r}{k}. \quad \square$$

También satisface identidades nuevas, que son relevantes cuando r no es un natural. En particular, podremos obtener formulas en términos del coeficiente binomial usual para r negativo y para $r = \frac{1}{2}$

Proposición. Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \geq 1$, se cumplen las siguientes identidades:

1. $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$.
2. $\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$.

Demostración. Para la primera, usando la definición,

$$\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!}.$$

Multiplicando arriba y abajo por $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k-2) = 2^{k-1}(k-1)!$, obtenemos

$$\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!} = (-1)^{k-1} \frac{1}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}.$$

Por último,

$$\binom{-r}{k} = \frac{(-r)(-r-1) \cdots (-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{r(r+1) \cdots (r+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}. \quad \square$$

Ejemplo. La primera identidad nos da, por ejemplo,

$$\binom{1/2}{4} = (-1)^3 \frac{1}{4 \cdot 2^7} \binom{6}{3} = -\frac{5}{128}.$$

La segunda identidad permite reescribir coeficientes con índice superior negativo:

$$\binom{-3}{k} = (-1)^k \binom{k+2}{k}.$$

Con esta notación, podemos extender la expansión binomial usual a exponentes reales. Esto es lo que nos permitirá leer coeficientes de expresiones como $(1 - 4x)^{1/2}$ o $\frac{1}{(1-rx)^m}$.

Teorema (Teorema del binomio generalizado). Para $r \in \mathbb{R}$, se cumple la identidad de series formales

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Cuando r es un entero no negativo, esta es la expansión binomial usual y la suma tiene finitos términos no nulos. Para otros valores de r , la identidad produce una serie infinita.

Ejemplo. Consideremos la función generatriz $A(x) = \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{1/2}$. Por el teorema del binomio generalizado,

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k.$$

Separando el término $k = 0$ y usando la fórmula para $\binom{1/2}{k}$,

$$A(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} (-4x)^k = 1 - \sum_{k \geq 1} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k.$$

Ejemplo. Recordemos la recurrencia de los números de Catalán:

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = c_n \star c_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{para } n \geq 0.$$

Si $C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$, entonces la fórmula del producto nos da

$$C(x) - 1 = xC(x)^2.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para $C(x)$,

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Como $2xC(x)$ tiene término constante 0, debemos tomar el signo menos:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Usando la expansión anterior de $\sqrt{1-4x}$,

$$C(x) = \frac{1}{2x} \sum_{k \geq 1} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$

Por lo tanto,

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Ejemplo. ¿Cuántas palabras binarias de largo n podemos formar si debemos marcar exactamente dos posiciones distintas? Dos objetos son distintos si cambia alguna letra o el conjunto de posiciones marcadas.

Para obtener una recurrencia, contemos también las palabras binarias de largo n con exactamente una posición marcada. Denotemos esta cantidad por b_n , con $b_0 = 0$. Si la última posición no está marcada, podemos elegir su letra de dos formas y las primeras $n-1$ posiciones deben tener una marca. Si la última posición está marcada, podemos elegir libremente las n letras. Por lo tanto,

$$b_n = 2b_{n-1} + 2^n \quad (n \geq 1).$$

Para una palabra con dos marcas, si la última posición no está marcada quedan dos marcas en las primeras $n-1$ posiciones; si está marcada, queda una. En ambos casos hay dos opciones para la última letra, así que

$$a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Para $n \geq 2$, podemos eliminar b_{n-1} usando las dos igualdades anteriores:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 4b_{n-2} + 2^n \\ &= 2a_{n-1} + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + 2^n \\ &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n. \end{aligned}$$

Sea $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Multiplicando la recurrencia por x^n y sumando sobre $n \geq 2$, como $a_0 = a_1 = 0$, obtenemos

$$A(x) = 4xA(x) - 4x^2A(x) + \sum_{n \geq 2} 2^n x^n = 4xA(x) - 4x^2A(x) + \frac{4x^2}{1-2x}.$$

Luego,

$$(1-2x)^2 A(x) = \frac{4x^2}{1-2x}, \quad A(x) = \frac{4x^2}{(1-2x)^3}.$$

Por el teorema del binomio generalizado,

$$\frac{1}{(1-2x)^3} = \sum_{k \geq 0} \binom{-3}{k} (-2x)^k = \sum_{k \geq 0} \binom{k+2}{2} 2^k x^k.$$

Multiplicando por $4x^2$ y reindexando,

$$A(x) = \sum_{n \geq 2} 2^n \binom{n}{2} x^n.$$

Por lo tanto, $a_n = 2^n \binom{n}{2}$ para todo $n \geq 0$. Podemos comprobar el resultado eligiendo primero las dos posiciones marcadas y luego las n letras.

Ejemplo. ¿Cuántos caminos hay de $(0,0)$ a $(n,0)$ si podemos usar pasos $(1,1)$, $(1,-1)$ y $(1,0)$, sin pasar por debajo del eje horizontal? Sea m_n la cantidad de estos caminos. Tenemos $m_0 = 1$, contando el camino vacío, y $m_1 = 1$, porque sólo podemos dar un paso horizontal.

Para $n \geq 2$, separemos los caminos según su primer paso. Si es horizontal, al quitarlo queda uno de los m_{n-1} caminos de largo $n-1$. Si es ascendente, consideremos el primer paso descendente que devuelve el camino al eje horizontal. Si entre ambos pasos hay k pasos, la parte intermedia, vista una unidad más abajo, es uno de los caminos contados por m_k . Después de ese regreso queda un camino contado por m_{n-2-k} . Cada elección de estas dos partes produce un camino, y su descomposición es única. Por lo tanto,

$$m_n = m_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} m_k m_{n-2-k} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Definamos $M(x) = \sum_{n \geq 0} m_n x^n$. Multiplicando la recurrencia por x^n y sumando para $n \geq 2$, la fórmula del producto nos da

$$M(x) - 1 - x = x(M(x) - 1) + x^2 M(x)^2,$$

así que $M(x) = 1 + xM(x) + x^2 M(x)^2$. Resolviendo la ecuación cuadrática,

$$M(x) = \frac{1 - x \pm \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}.$$

Como $2x^2 M(x)$ tiene término constante 0, debemos tomar el signo menos.

Para obtener los coeficientes, notemos que

$$1 - 2x - 3x^2 = (1 - x)^2 - 4x^2.$$

Tomando $t = x^2/(1-x)^2$ y usando la expansión que obtuvimos para los números de Catalán, tenemos

$$M(x) = \frac{1}{1-x} \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{k \geq 0} c_k \frac{x^{2k}}{(1-x)^{2k+1}}.$$

Esta sustitución tiene sentido como serie formal: el término de índice k sólo puede aportar potencias de grado al menos $2k$, así que cada coeficiente recibe finitos aportes. Por el teorema del binomio generalizado,

$$\frac{1}{(1-x)^{2k+1}} = \sum_{j \geq 0} \binom{2k+j}{2k} x^j.$$

Para obtener x^n debemos tomar $j = n - 2k$, lo que exige $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Luego, para todo $n \geq 0$,

$$m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} c_k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Para cerrar, agrupemos algunas funciones generatrices que ya aparecieron o que se deducen directamente de las operaciones anteriores.

Proposición (Catálogo de FGO). Las siguientes identidades valen como identidades de funciones generatrices ordinarias:

- Si $a_n = c$, entonces $A(x) = \frac{c}{1-x}$.
- Si $a_n = (-1)^n$, entonces $A(x) = \frac{1}{1+x}$.
- Si $a_n = r^n$, entonces $A(x) = \frac{1}{1-rx}$.
- Si $a_n = \binom{m}{n}$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo y $\binom{m}{n} = 0$ para $n > m$, entonces $A(x) = (1+x)^m$.
- Si $a_n = n+1$, entonces $A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Si $a_n = [n=0]$, entonces $A(x) = 1$.
- Si $a_n = [n=t]$, con $t \in \mathbb{N}$, entonces $A(x) = x^t$.
- Si $a_n = [d|n]$, con $d \in \mathbb{N}$ y $d \geq 1$, entonces $A(x) = \frac{1}{1-x^d}$.
- Si $a_n = \binom{n+m-1}{n}$, con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ fijo, entonces $A(x) = \frac{1}{(1-x)^m}$.
- Si $a_n = \binom{r}{n}$, con $r \in \mathbb{R}$ fijo, entonces $A(x) = (1+x)^r$.
- Si $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, entonces $A(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

3.6.3. Ejercicios

1. a) Use funciones generatrices para encontrar una fórmula cerrada para cada sucesión. Considere $r > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - 1) $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = ra_n + r^n$ para $n \geq 0$.
 - 2) $b_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$b_n = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k.$$
 - 3) $c_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$c_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} r^k c_{n-1-k}.$$
- b) Tenemos monedas de 1 peso y de d pesos, donde $d \geq 2$ es un entero fijo. Sea m_n el número de formas de pagar exactamente n pesos si no importa el orden de las monedas.
 - 1) Escriba la función generatriz ordinaria de $(m_n)_{n \geq 0}$ como producto de dos series geométricas.
 - 2) Deduzca una fórmula cerrada para m_n .
- c) Calcule los siguientes coeficientes binomiales generalizados. Considere $m \geq 1$ entero, $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$.
 - 1) $\binom{1/2}{4}$.
 - 2) $\binom{-m}{k}$.
 - 3) $\binom{r}{3}$.

d) Use el teorema del binomio generalizado para encontrar los primeros cuatro términos no nulos de cada función generatriz. Considere $r > 0$ y $m \geq 1$ entero.

- 1) $(1 - rx)^{-2}$.
- 2) $(1 + x)^{1/2}$.
- 3) $\frac{1}{(1+x)^m}$.

2. Una *carrera de unos* es un bloque no vacío de unos consecutivos delimitado por ceros o por los extremos de la palabra. Por ejemplo, la palabra 00111011 tiene dos carreras de unos. Para $n, r \in \mathbb{N}$, sea $a_{n,r}$ el número de palabras binarias de largo n que tienen exactamente r carreras de unos.

a) Determine $a_{n,0}$ para $n \geq 0$ y $a_{0,r}$ para $r \geq 1$. ¿Cuál es el menor largo posible de una palabra con $r \geq 1$ carreras de unos?

b) Obtenga recurrencias para $a_{n,r}$.

Indicación: le puede ser útil considerar los casos $r = 1$ y $r > 1$.

c) Sea $A_r(x) = \sum_{n \geq 0} a_{n,r} x^n$. Encuentre una expresión para $A_r(x)$.

d) Use el teorema del binomio generalizado para demostrar que

$$a_{n,r} = \binom{n+1}{2r} \quad \text{para } n, r \geq 0.$$

¿Hay una interpretación combinatorial de esta fórmula?

3. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de números reales. Su *transformada binomial* es la sucesión $(b_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

Mostraremos que podemos recuperar la sucesión original mediante la *fórmula de inversión binomial*:

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

a) Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, use el teorema del binomio generalizado para demostrar que

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

b) Sean $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Use el inciso anterior para demostrar que

$$B(x) = \frac{1}{1-x} A\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Indicación: Note que $A(U(x)) = \sum_{k \geq 0} a_k U(x)^k$.

c) ¿Qué ocurre en la expresión anterior si reemplazamos x por $\frac{y}{1+y}$?

d) Concluya la fórmula de inversión binomial.