

3.8. Método simbólico

Hasta ahora hemos usado las funciones generatrices para resolver indirectamente problemas de conteo: primero obtenemos una recurrencia y vía funciones generatrices obtenemos una fórmula cerrada para el problema de conteo original. Una segunda forma de usar funciones generatrices es modelar directamente el proceso de conteo con una función generatriz, y luego leer el coeficiente que nos interesa. Dicha técnica se suele conocer como el *método simbólico* y es una herramienta poderosa para resolver problemas de conteo.

Veremos tres principios fundamentales para modelar problemas de conteo con funciones generatrices: el principio de la suma, el principio convolutivo y el principio de las listas.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n . La función generatriz ordinaria de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

3.8.1. Suma

Si una elección tiene alternativas disjuntas, podemos contar los objetos de cada peso sumando las cantidades de las alternativas.

Teorema (Principio aditivo). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente. Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x) + B(x).$$

Demostración. Para obtener peso n , podemos elegir un objeto de $\mathcal{A}$ de peso n o un objeto de $\mathcal{B}$ de peso n . Como las alternativas son disjuntas, hay $a_n + b_n$ formas de hacer esto. Por lo tanto,

$$[x^n](A(x) + B(x)) = a_n + b_n. \quad \square$$

Este principio dice que una suma modela un *o*: usamos $A(x) + B(x)$ cuando el objeto pertenece a una de varias alternativas disjuntas.

Ejemplo. Tenemos dos fichas rojas, una marcada con un 1 y la otra con un 3. También tenemos dos fichas azules, una marcada con un 2 y la otra con un 3. Queremos contar cuántas formas hay de elegir una ficha según su marca.

La FGO de las fichas rojas es

$$R(x) = x + x^3,$$

y la FGO de las fichas azules es

$$Z(x) = x^2 + x^3.$$

Como elegimos una ficha roja o una ficha azul, y las alternativas son disjuntas, la FGO total es

$$F(x) = R(x) + Z(x) = x + x^2 + 2x^3.$$

Por ejemplo, $[x^3]F(x) = 2$, porque hay dos fichas marcadas con 3: una roja y una azul.

Ejemplo. Un código no vacío está formado únicamente por letras del alfabeto $\{a, b\}$ o únicamente por dígitos del alfabeto $\{0, 1, 2\}$. Queremos contar los códigos según su largo. El recurso son las posiciones del código: cada letra o dígito ocupa una posición.

Para $n \geq 1$, hay 2^n códigos de letras y 3^n códigos de dígitos. Sus FGO son

$$L(x) = \sum_{n \geq 1} 2^n x^n = \frac{2x}{1-2x}, \quad D(x) = \sum_{n \geq 1} 3^n x^n = \frac{3x}{1-3x}.$$

Como ningún código no vacío pertenece a ambos tipos, el principio aditivo nos da

$$F(x) = L(x) + D(x) = \frac{2x}{1-2x} + \frac{3x}{1-3x}.$$

Así, $[x^n]F(x) = 2^n + 3^n$ para $n \geq 1$. Por ejemplo, hay $[x^4]F(x) = 16 + 81 = 97$ códigos que ocupan exactamente cuatro posiciones.

3.8.2. Producto

La fórmula del producto de FGO que vimos antes cuenta pares de objetos según la suma de sus pesos.

Teorema (Principio convolutivo). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x)B(x).$$

Aquí el objeto construido es el par ordenado de los dos objetos elegidos.

Demostración. Para obtener peso total n , podemos elegir un objeto de $\mathcal{A}$ de peso k y un objeto de $\mathcal{B}$ de peso $n - k$. Hay $a_k b_{n-k}$ formas de hacer esto. Por lo tanto,

$$[x^n]A(x)B(x) = a_n \star b_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad \square$$

En problemas más elementales, el mismo principio aparece así: cada variable independiente aporta un factor, y el exponente total registra el consumo total.

Ejemplo. ¿Cuántas soluciones enteras existen de $e_1 + e_2 = 8$ sujetas a

$$2 \leq e_1 \leq 5, \quad 3 \leq e_2 \leq 6?$$

Para e_1 usamos $F_1(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, y para e_2 usamos $F_2(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Entonces

$$F_1(x)F_2(x) = x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + x^{11}.$$

Como $[x^8]F_1(x)F_2(x) = 4$, hay 4 soluciones:

$$(2, 6), \quad (3, 5), \quad (4, 4), \quad (5, 3).$$

Ejemplo. Supongamos que tenemos billetes de 1, 2 y 5 mil pesos, y queremos contar las formas de pagar p mil pesos usando cualquier cantidad de billetes, sin importar el orden. Si el orden no importa, sólo registramos cuántos billetes usamos de cada tipo. Para billetes de valor d , usar j billetes aporta un valor total de jd mil pesos, así que el factor correspondiente es

$$1 + x^d + x^{2d} + x^{3d} + \cdots = \frac{1}{1 - x^d}.$$

Por el principio convolutivo,

$$M(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots).$$

Es decir,

$$M(x) = \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^5)}.$$

La expansión comienza como

$$M(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + \cdots.$$

Como $[x^5]M(x) = 4$, hay 4 formas de pagar 5 mil pesos, que son:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 2, \quad 1 + 2 + 2, \quad 5.$$

Ejemplo. Un curso tiene n días de clases. Queremos particionar el curso en dos bloques: los primeros k días serán teoría y los últimos $n - k$ serán laboratorio, con $1 \leq k \leq n - 2$. Hay que planificar un control en el bloque de teoría y dos controles en el bloque de laboratorio. Contamos la separación entre los bloques y las fechas de los controles; los tres controles se realizan en días distintos. El peso de un bloque es su duración en días; el presupuesto total es n días.

Si el bloque de teoría tiene k días, hay k formas de planificar su control. La FGO para este bloque es

$$A(x) = \sum_{k \geq 1} kx^k = x \sum_{k \geq 0} (k + 1)x^k = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

Si el bloque de laboratorio tiene m días, hay $\binom{m}{2}$ formas de planificar dos controles. La FGO para este bloque es

$$B(x) = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{2} x^m = \sum_{m \geq 2} \binom{m}{m - 2} x^m = x^2 \sum_{m \geq 0} \binom{m + 2}{m} x^m = \frac{x^2}{(1 - x)^3}.$$

Por el principio convolutivo, si f_n es el número de planificaciones de un curso de n días,

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n = A(x)B(x) = \frac{x^3}{(1 - x)^5}.$$

Usando el binomio generalizado,

$$F(x) = x^3 \sum_{n \geq 0} \binom{-5}{n} (-x)^n = x^3 \sum_{n \geq 0} \binom{n + 4}{n} x^n = \sum_{n \geq 3} \binom{n + 1}{n - 3} x^n = \sum_{n \geq 3} \binom{n + 1}{4} x^n.$$

Por lo tanto, $f_n = \binom{n+1}{4}$ para todo $n \geq 3$.

Ejemplo. Retomemos los caminos de Dyck, contados por su número de pasos ascendentes. Sabemos que hay c_n caminos con n pasos ascendentes, donde c_n es el n -ésimo número de Catalán. Escribamos $C(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$.

Un camino no vacío comienza con un paso $\nearrow$. Consideremos el paso $\searrow$ que lo devuelve por primera vez a altura 0. La parte entre ambos pasos, vista una unidad más abajo, es un camino de Dyck P , y después del regreso queda otro camino de Dyck Q . Así, todo camino no vacío se descompone de manera única como

$$\nearrow P \searrow Q.$$

Los caminos P y Q pueden ser vacíos, y cualquier par ordenado de caminos de Dyck produce de esta forma un camino no vacío.

Por el principio convolutivo, elegir P y Q aporta $C(x)^2$. El ascenso inicial y su descenso correspondiente agregan un solo paso ascendente, así que aportan un factor x . Como también podemos elegir el camino vacío, que aporta 1, el principio aditivo nos da

$$C(x) = 1 + xC(x)^2.$$

Esta es la ecuación que ya resolvimos al estudiar los números de Catalán, y de ella obtuvimos

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}, \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

3.8.3. Listas

El principio convolutivo sirve cuando el número de elecciones independientes está fijo. Si fijamos el presupuesto total, la cantidad de elecciones puede variar: por ejemplo, podemos repartir a las mismas personas en unidades de distintos tamaños. Este es el caso de las listas, que son objetos con una cantidad arbitraria de posiciones, cada una de las cuales se llena con un objeto de una clase dada. Sumaremos los conteos correspondientes a cada largo posible de la lista.

Teorema (Principio de las listas). Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$. Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos. Entonces la FGO de esta clase es

$$F(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

Demostración. Para $m \geq 0$, consideremos primero las listas con exactamente m elementos. Por el principio convolutivo aplicado m veces, la FGO de estas listas es $A(x)^m$. En particular, cuando $m = 0$ obtenemos la lista vacía, que aporta 1.

Como las listas de largos distintos son disjuntas, por el principio aditivo la FGO de todas las listas es

$$\sum_{m \geq 0} A(x)^m = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

El supuesto $a_0 = 0$ garantiza que no hay objetos de peso 0 en $\mathcal{A}$, así que cada coeficiente cuenta una cantidad finita de listas. $\square$

Ejemplo. Si el orden sí importa y queremos usar exactamente m billetes de valores 1, 2 y 5 mil pesos, cada posición aporta un billete. Esto todavía es una aplicación del principio convolutivo:

$$H_m(x) = (x + x^2 + x^5)^m.$$

Por ejemplo,

$$H_2(x) = (x + x^2 + x^5)^2 = x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^6 + 2x^7 + x^{10}.$$

Como $[x^3]H_2(x) = 2$, obtenemos las secuencias (1, 2) y (2, 1).

Si ahora permitimos cualquier número de billetes, usamos el principio de las listas. Tomando $A(x) = x + x^2 + x^5$ para la clase de billetes, obtenemos

$$H(x) = \frac{1}{1 - A(x)} = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^5}.$$

La expansión comienza como

$$H(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 9x^5 + 15x^6 + 26x^7 + \dots$$

Como $[x^5]H(x) = 9$, hay 9 formas ordenadas de pagar 5 mil pesos.

Ejemplo. Tenemos n personas en una fila. Queremos dividir la fila en unidades consecutivas no vacías y elegir un comandante en cada unidad. El orden de la fila está fijado. El peso de una unidad es su número de personas, y el presupuesto total es n personas.

Si una unidad tiene tamaño k , hay k formas de elegir su comandante. La FGO para una unidad es

$$A(x) = \sum_{k \geq 1} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Como el número de unidades es arbitrario, usamos el principio de las listas:

$$H(x) = \frac{1}{1 - A(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = 1 + \frac{x}{1 - 3x + x^2}.$$

Para obtener una fórmula cerrada, usamos fracciones parciales. Sean

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Entonces $1 - 3x + x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, y

$$\frac{x}{1 - 3x + x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x} \right).$$

Por lo tanto,

$$H(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

Si h_n es el número de formas para una fila de n personas, entonces

$$h_0 = 1, \quad h_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \quad \text{para } n \geq 1.$$

La expansión comienza como

$$H(x) = 1 + x + 3x^2 + 8x^3 + 21x^4 + \dots$$

Por ejemplo, hay 8 formas de dividir una fila de 3 personas en unidades consecutivas y elegir un comandante en cada unidad.

3.8.4. Chequeo rápido

1. Una librería vende novelas y revistas. Sean $A(x)$ y $B(x)$ las FGO de las novelas y revistas según su número de páginas, respectivamente. Queremos comprar una novela o una revista. ¿Cuál es la FGO de los libros que podemos elegir según su número de páginas?

a) $\frac{1}{1 - A(x) - B(x)}$. b) $A(x)B(x)$. c) $A(x) + B(x)$.

2. Un sistema identifica cada cuenta mediante un nombre de usuario formado sólo por letras o mediante el símbolo # seguido de su número. Sean $A(x)$ la FGO de los nombres según su largo y $B(x)$ la FGO de los números según su cantidad de dígitos. ¿Cuál es la FGO de los identificadores según su largo total?

a) $A(x) + xB(x)$. b) $A(x) + B(x)$. c) $A(x)B(x)$.

3. Podemos subir una escalera avanzando uno o dos peldaños en cada paso. ¿Cuál es la FGO del número de formas de subir n peldaños?

a) $\frac{1}{1 - x - x^2}$. b) $\frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)}$. c) $(x + x^2)^2$.

4. Consideremos la clase de palabras binarias, incluyendo la palabra vacía, con peso igual al largo de la palabra. El principio de las listas se puede aplicar a esta clase.

a) Falso. b) Verdadero.

5. Sea $\mathcal{A}$ una clase con FGO $A(x)$ tal que se puede aplicar el principio de las listas. ¿Qué contribuye al término constante de $\frac{1}{1 - A(x)}$?

a) Los objetos de $\mathcal{A}$ de peso 0. b) Las listas de largo 1. c) La lista vacía.

3.8.5. Ejercicios

1. a) Lanzamos un dado rojo y uno azul, ambos con caras numeradas del 1 al 6. Sea d_n el número de resultados cuya suma es n . Usando el principio convolutivo, encuentre su FGO $D(x)$.
 b) Un código se forma concatenando una palabra sobre $\{a, b\}$ y una palabra sobre $\{0, 1\}$, en ese orden. Ambas palabras pueden ser vacías. Si c_n es el número de códigos de largo n , encuentre su FGO $C(x)$ usando el principio convolutivo.
 c) Sean $r \geq 1$ y $s \geq 0$ enteros. Si a_n es el número de formas de entregar n peluches idénticos a r niños, de modo que cada uno reciba a lo más s peluches, encuentre su FGO $A(x)$.
 d) Sean $q, r \geq 1$ enteros. Queremos cubrir una franja de n casillas con cuadrados de una casilla y dominós de dos casillas consecutivas, sin superposiciones ni espacios vacíos. Cada cuadrado puede tener uno de q colores y cada dominó uno de r colores. Si t_n es el número de recubrimientos, encuentre su FGO $T(x)$.

2. Encuentre, usando los principios del método simbólico, la FGO de cada una de las siguientes clases.

a) Un chef está preparando un banquete de n platos. Los platos se dividen en cuatro tipos: *entradas*, *sopas*, *sopas* y *postres*. El chef decide imponer las siguientes restricciones:

- puede haber a lo más una entrada,
- debe haber un número par de sopas,
- el número de platos de fondo debe ser múltiplo de 3,
- puede haber a lo más dos postres.

Un menú queda determinado por la cantidad de platos de cada tipo, sin importar el orden. Sea $(m_n)_{n \geq 0}$ el número de menús posibles con n platos. Encuentre la FGO $M(x)$ de $(m_n)_{n \geq 0}$.

b) Tenemos n personas en una fila cuyo orden está fijado. Queremos dividirla en dos grupos consecutivos no vacíos y elegir un representante en cada grupo. Si g_n es el número de formas de hacerlo, encuentre su FGO $G(x)$ usando el principio convolutivo.

c) Sea t_n el número de árboles planos enraizados (APE) con n vértices. Un APE es un árbol finito con raíz en el que cada vértice tiene una lista, posiblemente vacía, de hijos ordenados de izquierda a derecha.

Encuentre la FGO $T(x)$ de $(t_n)_{n \geq 0}$.

d) Sea b_n el número de palabras binarias de largo n sin unos aislados: cada 1 debe tener otro 1 inmediatamente antes o después.

Encuentre la FGO $B(x)$ de $(b_n)_{n \geq 0}$.

3. Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, hay tantas formas de escribir n como suma de enteros positivos distintos como de escribirlo como suma de enteros positivos impares, sin considerar el orden de los sumandos. Estas sumas se llaman *particiones* de n , y sus sumandos se llaman *partes*. Incluimos una única partición de 0: la suma vacía.

a) Enumere las particiones de 6 de ambos tipos.

b) Fije un entero $N \geq 1$. Sean $P_N(x)$ y $Q_N(x)$ las FGO de las particiones con partes distintas y de las particiones con partes impares, respectivamente, restringiendo en ambos casos cada parte a ser a lo más N . Exprese cada FGO como un producto de N o menos factores y explique qué elección registra cada factor.

c) Use $1 + x^j = (1 - x^{2j})/(1 - x^j)$ para demostrar que

$$P_N(x) = Q_N(x) \prod_{j=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^N (1 - x^{2j}).$$

Explique por qué el producto de la derecha no altera los coeficientes de grados $0, \dots, N$ de $Q_N(x)$ y concluya la igualdad de los conteos para todo $n \in \mathbb{N}$.