

4.1. Definiciones básicas de grafos

4.1.1. Introducción a grafos

Muchas estructuras que nos interesarán en la ciencia de la computación y matemáticas discretas se pueden modelar como grafos. Por ejemplo:

- computadores conectados en una red,
- ciudades conectadas por rutas,
- personas conectadas por amistades o por relaciones de seguimiento,
- módulos de un programa conectados por dependencias,
- clases de un sistema conectadas por herencia,
- palabras conectadas por relaciones de sinonimia.

La teoría de grafos nos entrega un lenguaje común para estudiar todas estas situaciones.

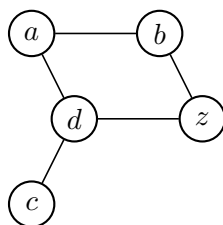
Definición. Un *grafo (simple)* es un par $G = (V, E)$, donde:

- V es un conjunto finito de *vértices* o *nodos*;
- E es un conjunto finito de *aristas*, donde cada arista es un conjunto de dos vértices distintos.

Usualmente escribiremos n para denotar el número de vértices y m para denotar el número de aristas; es decir, $n = |V|$ y $m = |E|$.

Ejemplo. Consideremos $V = \{a, b, c, d, z\}$ y $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}$. Entonces $G = (V, E)$ es un grafo con 5 vértices y 5 aristas.

Lo podemos dibujar de la siguiente manera, donde cada vértice es un punto y cada arista es una línea que une dos puntos:



Notemos que las aristas de un grafo simple no tienen orientación: si u y v están conectados esto indica que la arista $\{u, v\}$ (o $\{v, u\}$) existe. Para simplificar la notación, escribiremos uv en lugar de $\{u, v\}$ para denotar la arista que conecta a los vértices u y v .

Hay veces dónde nos interesa registrar la dirección de las conexiones. Una alternativa es un *digrafo simple*, donde cada arista tiene una orientación.

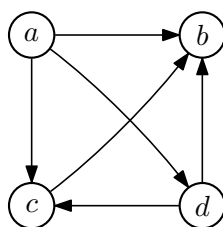
Definición. Un *digrafo simple* es un par $G = (V, E)$, donde:

- V es un conjunto finito de *vértices* o *nodos*;
- E es un conjunto finito de *arcos*, donde cada arco es un par ordenado de vértices distintos.

Ejemplo. Consideremos el digrafo $G = (V, E)$ con

$$V = \{a, b, c, d\}, \quad E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (c, b), (d, b), (d, c)\}.$$

Lo podemos dibujar usando flechas para indicar la dirección de cada arco:



Es un digrafo simple con 4 vértices y 6 arcos. Por ejemplo, el arco (a, b) va desde a hacia b , mientras que $(b, a) \notin E$.

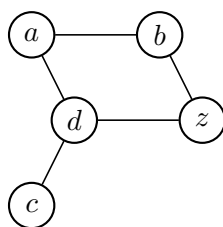
Partiremos introduciendo terminología para describir las conexiones de un grafo.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y sean $u, v \in V$. Decimos que u y v son *adyacentes* si $uv \in E$. De manera convers, decimos que uv es una *arista incidente* en u y en v . La *vecindad* de un vértice v es el conjunto

$$N(v) = \{u \in V : uv \in E\}.$$

La vecindad de un vértice contiene exactamente los vértices que están conectados a él por una arista. Por eso, pensar en $N(v)$ es pensar en los contactos directos de v : sus amigos en una red social, sus vecinos en un mapa de rutas, o los servidores a los que está conectado directamente en una red de computadores.

Ejemplo. En el siguiente grafo:



Las vecindades de los vértices son

$$\begin{aligned} N(a) &= \{b, d\}, & N(b) &= \{a, z\}, \\ N(c) &= \{d\}, & N(d) &= \{a, c, z\}, \\ N(z) &= \{b, d\}. \end{aligned}$$

En particular, a y b son adyacentes, pero a y z no lo son. La arista ab es incidente en a y en b .

En un digrafo debemos distinguir los vértices a los que podemos llegar por un arco de aquellos desde los que llega un arco.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un digrafo simple. Un arco (u, v) tiene *vértice inicial* u y *vértice final* v : sale de u y entra a v , y es incidente en ambos vértices. Decimos que v es un *vecino de salida* de u y que u es un *vecino de entrada* de v . Las *vecindades de salida* y *de entrada* de un vértice v son, respectivamente,

$$N^+(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}, \quad N^-(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}.$$

Ejemplo. En el digrafo anterior, las vecindades de salida y de entrada son:

vértice	$N^+(v)$	$N^-(v)$
a	$\{b, c, d\}$	$\emptyset$
b	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$
c	$\{b\}$	$\{a, d\}$
d	$\{b, c\}$	$\{a\}$

Por ejemplo, el arco (d, c) nos dice que $c \in N^+(d)$ y que $d \in N^-(c)$.

Tipos de aristas y tipos de grafos

Si bien la mayor parte del tiempo discutiremos grafos simples, uno puede permitir variantes más generales de aristas.

Definición. En el contexto de grafos:

- Una *arista paralela* es una copia de una arista que ya existe entre los mismos dos vértices.
- Un *loop* o *bucle* es una arista de un vértice hacia sí mismo.

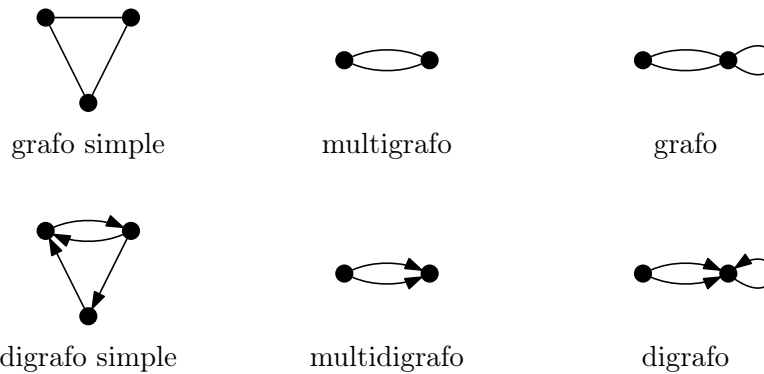
Los mismos conceptos se aplican a digrafos, donde:

- un *arco paralelo* es una copia de un arco que ya existe entre los mismos dos vértices y con la misma dirección, y
- un *loop* o *bucle* es un arco de un vértice hacia sí mismo.

Estas tres posibilidades permiten distinguir varias clases de grafos. La siguiente tabla resume la nomenclatura que usaremos.

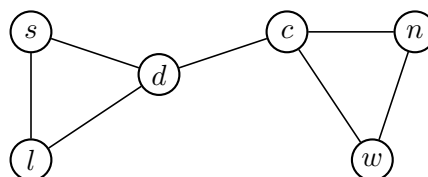
Tipo	Dirigido	Paralelas	Loops
grafo simple	no	no	no
multigrafo	no	sí	no
grafo	no	sí	sí
digrafo simple	sí	no	no
multidigrafo	sí	sí	no
digrafo	sí	sí	sí

En las columnas de aristas paralelas y loops, “sí” indica que están permitidos, aunque no necesariamente aparezcan. Notemos que en un digrafo simple podemos tener tanto (u, v) como (v, u) : son arcos distintos y no son paralelos (a veces se le llaman *antiparalelos*). Visualmente, las diferencias son las siguientes.



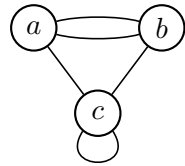
Si no especificamos que un grafo es un digrafo, asumiremos que no lo es. Además, en muchos contextos diremos simplemente “grafo” para referirnos a un grafo simple no dirigido, siempre que no haya riesgo de confusión.

Ejemplo. Una red de computadores donde cada enlace físico conecta dos computadores distintos, y donde no distinguimos rutas redundantes entre el mismo par de computadores, se modela naturalmente por un grafo simple.

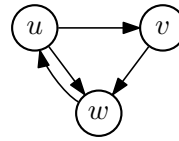


Ejemplo. Si la misma red tiene rutas redundantes entre algunos pares de data centers, entonces conviene usar un multigrafo. En cambio, si además hay enlaces de diagnóstico local desde un computador hacia sí mismo, aparecen loops y debemos permitir grafos con loops.

Si los enlaces son unidireccionales, entonces el modelo correcto es un digrafo. Por ejemplo, en una red social de seguidores, que u siga a v no implica necesariamente que v siga a u .



grafo con loop



digrafo

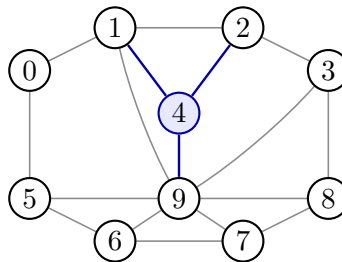
Grado de un vértice

Introduciremos ahora una medida de cuán conectado está un vértice en un grafo. Tal vez la forma más básica de medir la conectividad de un vértice es contar cuántas aristas lo conectan con otros vértices.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $v \in V$. El *grado* de v , denotado por $d(v)$, es el número de aristas incidentes en v , contando cada loop dos veces. Si $d(v) = 0$, decimos que v es un *vértice aislado*.

Si bien la convención de contar cada loop dos veces es la más común (una por cada extremo), algunas referencias cuentan cada loop una sola vez.

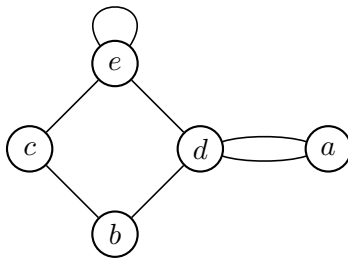
Ejemplo. Consideremos el siguiente grafo.



Las vecindades y los grados de sus vértices son:

vértice v	$N(v)$	$d(v)$
0	{1, 5}	2
1	{0, 2, 4, 9}	4
2	{1, 3, 4}	3
3	{2, 8, 9}	3
4	{1, 2, 9}	3
5	{0, 6, 9}	3
6	{5, 7, 9}	3
7	{6, 8, 9}	3
8	{3, 7, 9}	3
9	{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	7

Ejemplo. En un grafo, las aristas paralelas se cuentan por separado y un loop aporta 2 al grado. En el siguiente grafo, el vértice e tiene un loop y el par d, a está unido por dos aristas paralelas.



Las vecindades y los grados son:

vértice v	$N(v)$	$d(v)$
a	$\{d\}$	2
b	$\{c, d\}$	2
c	$\{b, e\}$	2
d	$\{a, b, e\}$	4
e	$\{c, d, e\}$	4

El siguiente resultado, usualmente el primero que se prueba en un curso de teoría de grafos, relaciona el número de aristas con la suma de los grados de todos los vértices.

Teorema (Apretón de manos). Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Antes de probar el teorema, notemos que su nombre viene de pensar que cada arista representa un apretón de manos entre dos personas. Luego, el doble del número de apretones de manos es igual a la suma de los apretones de manos de cada persona.

Demostración. Daremos una demostración combinatorial: ambas cuentan el número de incidencias entre vértices y aristas, contando las dos incidencias de cada loop por separado.

El lado izquierdo de la ecuación cuenta el número total de incidencias, donde cada vértice contribuye con su grado.

Por otro lado, cada arista tiene exactamente dos extremos, que coinciden en un mismo vértice si la arista es un loop. Por lo tanto, cada arista aporta exactamente 2 a la suma total de grados.

Como hay m aristas, obtenemos

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m. \quad \square$$

Un corolario de lo anterior es que hay un número par de vértices de grado impar.

Proposición. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces G tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración. Dividamos los vértices en dos conjuntos según su paridad:

$$V_{\text{par}} = \{v \in V : d(v) \text{ es par}\},$$

$$V_{\text{impar}} = \{v \in V : d(v) \text{ es impar}\}.$$

Por el teorema del apretón de manos,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m,$$

así que la suma total de los grados es par. Además,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_{\text{par}}} d(v) + \sum_{v \in V_{\text{impar}}} d(v).$$

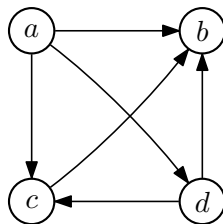
La primera suma del lado derecho es par, porque es suma de números pares. Por lo tanto, la segunda suma también debe ser par. Pero la segunda suma es una suma de $|V_{\text{impar}}|$ números impares. Una suma de números impares es par si y sólo si la cantidad de sumandos es par. Concluimos que $|V_{\text{impar}}|$ es par. $\square$

Grado en digrafos

Notemos que al tratar de definir el concepto de grado en un digrafo, nos encontramos con un problema: las incidencias juegan dos roles distintos, dependiendo si la arista *entra* o *sale* del vértice. Consideraremos esto al definir grado en digrafos.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sea $v \in V$. El *grado de salida* de v , denotado por $d^+(v)$, es el número de arcos que salen de v . El *grado de entrada* de v , denotado por $d^-(v)$, es el número de arcos que entran a v .

Ejemplo. Consideremos el siguiente digrafo.



Sus vecindades y grados de entrada y salida son:

vértice	$N^+(v)$	$N^-(v)$	$d^+(v)$	$d^-(v)$
a	$\{b, c, d\}$	$\emptyset$	3	0
b	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	0	3
c	$\{b\}$	$\{a, d\}$	1	2
d	$\{b, c\}$	$\{a\}$	2	1

Nuevamente tenemos una versión del teorema del apretón de manos, ahora para digrafos.

Teorema (Apretón de manos en digrafos). Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Entonces

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m.$$

Demostración. Cada arco tiene exactamente un vértice inicial y exactamente un vértice final. Si sumamos los grados de salida sobre todos los vértices, cada arco se cuenta exactamente una vez: en su vértice inicial. Por lo tanto,

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = m.$$

Análogamente, si sumamos los grados de entrada sobre todos los vértices, cada arco se cuenta exactamente una vez: en su vértice final. Así,

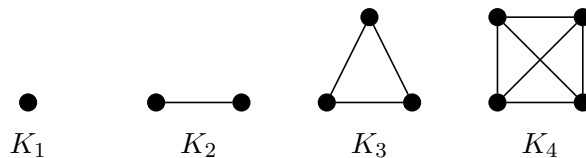
$$\sum_{v \in V} d^-(v) = m. \quad \square$$

4.1.2. Familias básicas de grafos

Algunos grafos aparecen con tanta frecuencia que tienen nombre propio. Estas familias serán nuestros primeros ejemplos de estructuras con propiedades reconocibles. Pensemos primero en un grafo donde *todos* los vértices están conectados entre sí.

Definición. El *grafo completo* con n vértices, denotado por K_n , es el grafo simple en que todo par de vértices distintos es adyacente.

Ejemplo. Los primeros grafos completos son:



El grado de cada vértice en K_n es $n - 1$, porque cada vértice está conectado con todos los demás. Notemos que el grafo completo K_n tiene

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

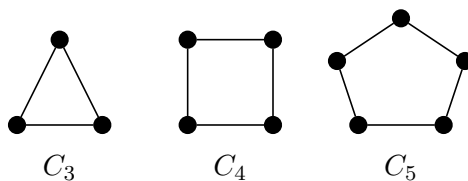
aristas. En efecto, en K_n hay una arista por cada par de vértices distintos. Por lo tanto, el número de aristas es el número de subconjuntos de tamaño 2 de un conjunto de tamaño n , que es $\binom{n}{2}$.

Otro ejemplo clásico es un grafo que forma una cadena cerrada de vértices.

Definición. Para $n \geq 3$, el *ciclo* con n vértices, denotado por C_n , es el grafo con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y aristas conectadas ciclicamente; es decir, con aristas

$$v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1.$$

Ejemplo. El grafo C_3 es un triángulo, C_4 es un cuadrado, y en general C_n corresponde a una cadena cerrada de n vértices.



En estos grafos, cada vértice tiene grado 2, porque cada vértice está conectado con exactamente dos vecinos.

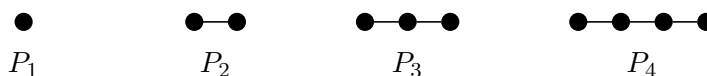
Más aún, el número de aristas en C_n es n , porque cada vértice aporta exactamente una arista nueva al grafo.

Otro ejemplo es conectar los vértices de manera lineal.

Definición. Para $n \geq 1$, el *camino* con n vértices, denotado por P_n , es el grafo con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y aristas conectando secuencialmente los vértices; es decir, con aristas

$$v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n.$$

Ejemplo. Los primeros caminos son:



Notemos que en P_n , con $n \geq 2$, todos los vértices tienen grado 2, excepto los dos extremos, que tienen grado 1. En P_1 hay un único vértice, de grado 0.

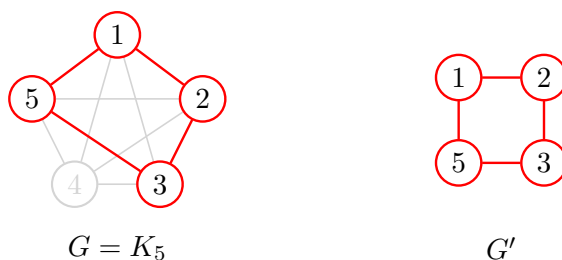
Además, el número de aristas en P_n es $n - 1$, porque cada vértice nuevo aporta exactamente una arista nueva al grafo.

4.1.3. Subgrafos

Las estructuras anteriores también pueden aparecer como partes de una red más grande. Esta idea de *subestructura* en un grafo, nos lleva a la noción de subgrafo.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un *subgrafo* de G es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Si $G' \neq G$, decimos que G' es un *subgrafo propio* de G .

Ejemplo. Si $G = K_5$, podemos obtener un subgrafo eliminando algunos vértices y algunas aristas. Por ejemplo, el grafo con vértices $\{1, 2, 3, 5\}$ y aristas $\{12, 23, 35, 15\}$ es un subgrafo propio de K_5 .



4.1.4. Complemento

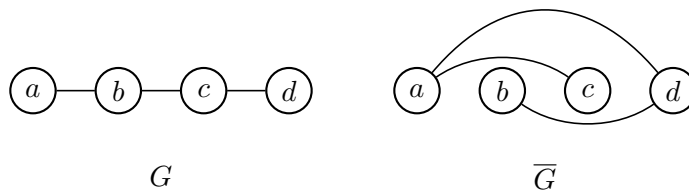
Otra estructura que podemos formar a partir de un grafo es su complemento. Este es justamente el grafo en que cada no-conexión se convierte en una conexión, y cada conexión se elimina. En el contexto de relaciones es justamente la relación de no-amistad, no-seguimiento, o no-conexión.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. El **complemento** de G es el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, donde para todo par de vértices distintos $u, v \in V$,

$$uv \in \overline{E} \quad \text{si y sólo si} \quad uv \notin E.$$

Notemos que el complemento tiene los mismos vértices que el grafo original, la diferencia está en las aristas.

Ejemplo. Consideremos el camino $a - b - c - d$. Su complemento tiene las aristas ac , ad y bd .



Es decir, el complemento de un camino de 4 vértices es nuevamente un camino de 4 vértices.

Notemos que podemos calcular el grado y número de aristas del complemento de un grafo simple en función del grado y número de aristas del grafo original.

Proposición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$ y $|E| = m$.

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1.$$

- El complemento $\overline{G}$ tiene $|E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - m$ aristas.

Demostración. Probemos primero la primera afirmación. Veremos que ambos lados cuentan el número de subconjuntos de tamaño 2 de V que contienen a v . En efecto, los subconjuntos de tamaño 2 de V son o una arista de G o una arista de $\overline{G}$; luego el lado izquierdo cuenta exactamente esto. El lado derecho cuenta todos los subconjuntos de tamaño 2 de V que contienen a v , que son exactamente $n - 1$.

Para la segunda afirmación, sumemos los grados de todos los vértices. Obtenemos

$$\sum_{v \in V} d_G(v) + \sum_{v \in V} d_{\overline{G}}(v) = \sum_{v \in V} (d_G(v) + d_{\overline{G}}(v)) = \sum_{v \in V} (n - 1) = n(n - 1).$$

Por otro lado, por el teorema del apretón de manos, tenemos

$$\sum_{v \in V} d_G(v) + \sum_{v \in V} d_{\overline{G}}(v) = 2|E(G)| + 2|E(\overline{G})| = 2m + 2|E(\overline{G})|.$$

Combinando estas dos ecuaciones y despejando $|E(\overline{G})|$, obtenemos

$$|E(\overline{G})| = \frac{n(n-1)}{2} - m = \binom{n}{2} - m. \quad \square$$

Chequeo rápido

- Un digrafo simple puede contener a la vez los arcos (u, v) y (v, u) , con $u \neq v$.
 - Falso.
 - Verdadero.
- En un grafo, las únicas aristas incidentes en v son un loop y una arista vu , con $u \neq v$. ¿Cuál es $d(v)$?
 - 1.
 - 2.
 - 3.
- Sea el digrafo simple con $V = \{a, b, c\}$ y $E = \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$. ¿Cuáles son $N^+(a)$ y $d^-(a)$, respectivamente?
 - $(\{b\}, 2)$.
 - $(\{b, c\}, 1)$.
 - $(\{b, c\}, 2)$.
- ¿Cuál de estas cantidades puede ser el número de vértices de grado impar de un grafo simple con cinco vértices?
 - 4.
 - 1.
 - 3.
- Sea G el camino $a - b - c - d$. ¿Cuál es la vecindad de b en $\overline{G}$?
 - $\{a, c\}$.
 - $\{a, c, d\}$.
 - $\{d\}$.

Ejercicios

- Andrés dispuso 8 servidores en un gran anillo con conexiones circulares (1-2-3-4-5-6-7-8-1). Luego, para añadir un tercer canal a cada uno, conectó cada servidor con otro del anillo (el 1 con el 6, el 2 con el 5, el 3 con el 8, y el 4 con el 7). Modele la red como un grafo simple: dé V y E , calcule $N(1)$ y determine el grado de cada vértice. ¿Cuántos canales tiene la red? Justifique usando el teorema del apretón de manos.
 - Juan tiene una casa de siete habitaciones. Cada puerta une dos habitaciones y no hay puertas al exterior. Después de unos años, Juan decide remodelar la casa. Le gustaría añadir puertas nuevas entre las habitaciones existentes (no se puede agregar puertas al exterior de la casa). ¿Es posible que cada habitación tenga un número impar de puertas?
 - Considere C_6 con vértices $1, 2, \dots, 6$ y aristas $12, 23, 34, 45, 56, 61$. Dibuje su complemento. Encuentre en él un subgrafo completo de mayor tamaño y justifique que no puede haber uno mayor.

2. Para $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ consideremos el grafo simple Q_r : sus vértices son los strings binarios de largo r , y dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada. Este grafo se llama *hipercubo de dimensión r* .
- a) Dibuje Q_2 y Q_3 .
 - b) Para un vértice $x = x_1 \cdots x_r$, determine $N(x)$ y $d(x)$. ¿Cuántos vértices y aristas tiene Q_r ? Justifique el número de aristas usando el teorema del apretón de manos.
 - c) Demuestre que Q_r no contiene un subgrafo completo de tres vértices.
 - d) Demuestre que dos vértices distintos de Q_r tienen cero o dos vecinos comunes. Caracterice cuándo tienen dos.
3. Sea $n \geq 4$ un entero. Definimos el grafo simple H_n cuyos vértices son los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dos vértices distintos A y B son adyacentes si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$.
- a) Determine el número de vértices, el grado de cada vértice y el número de aristas de H_n .
 - b) Cuente los subgrafos completos de tres vértices. Justifique que no faltan ni se repiten casos.
 - c) Determine el máximo número de vértices que puede tener un subgrafo completo de H_n . Demuestre su respuesta y describa todos los subgrafos completos que alcanzan ese máximo.