

4.2. Representación, isomorfismo e invariantes

4.2.1. Representaciones de grafos

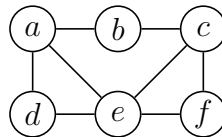
La sección anterior discutimos definiciones básicas de los grafos y algunas propiedades de los mismos. En esta sección, nos enfocaremos en distintas maneras de representar a los grafos, con particular énfasis en el almacenamiento efectivo en un computador.

La primera forma que discutiremos busca representar la información de adyacencia de un grafo en una matriz.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La *matriz de adyacencia* de G es la matriz $A = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{si } v_i v_j \notin E. \end{cases}$$

Ejemplo. Consideremos el grafo G con vértices $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y aristas $E = \{ab, ad, ae, bc, ce, cf, de, ef\}$. Una forma de dibujarlo es la siguiente.



Si ordenamos los vértices como a, b, c, d, e, f , entonces su matriz de adyacencia es

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	1	0
b	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	0	1	1
d	1	0	0	0	1	0
e	1	0	1	1	0	1
f	0	0	1	0	1	0

Proposición. Sea G un grafo simple y sea A su matriz de adyacencia. Entonces, A es simétrica y su diagonal sólo contiene ceros.

Demostración. Notemos que como G es un grafo simple no dirigido, si $v_i v_j \in E$ entonces $v_j v_i \in E$. Por la definición de matriz de adyacencia, esto implica que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j y por lo tanto A es simétrica.

Además, como G es simple, no tiene bucles. Luego $v_i v_i \notin E$ para todo i , y por lo tanto $a_{ii} = 0$ para todo i . $\square$

La matriz de adyacencia nos permite computar alguna información del grafo simplemente usando operaciones matriciales.

Recordemos que el producto de matrices AB se define por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Proposición. Sea G un grafo simple no dirigido con vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y matriz de adyacencia $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Si $i \neq j$, entonces $(A^2)_{ij}$ es el número de vecinos comunes de v_i y v_j .
2. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $(A^2)_{ii} = d(v_i)$.

Demostración. Si $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned}
 (A^2)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^n [v_i \text{ es adyacente a } v_k \text{ y } v_k \text{ es adyacente a } v_j] \\
 &= \sum_{k=1}^n [v_k \text{ es vecino común de } v_i \text{ y } v_j] \\
 &= \#\text{vecinos comunes de } v_i \text{ y } v_j.
 \end{aligned}$$

Similarmente, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
 (A^2)_{ii} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki} \\
 &= \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \\
 &= \sum_{k=1}^n [v_i \text{ es adyacente a } v_k]^2 \\
 &= \#\text{vecinos de } v_i
 \end{aligned}$$

En un grafo simple, esto último es exactamente el grado de v_i . □

Otra forma común de guardar la información de adyacencia de un grafo es mediante una lista por cada vértice, que contenga sus vecinos.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Una *lista de adyacencia* de G es una representación que, para cada vértice $v \in V$, almacena la lista de vértices adyacentes a v .

Ejemplo. Para el grafo anterior, la lista de adyacencia es

vértice	vértices adyacentes
a	b, d, e
b	a, c
c	b, e, f
d	a, e
e	a, c, d, f
f	c, e

Otra alternativa es guardar las incidencias del grafo: es decir, qué aristas inciden en cada vértice.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. La *matriz de incidencia* de G es la matriz $B = (b_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times m}$ definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ incide en } v_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo. Para el grafo anterior, nombremos las aristas como

$$e_1 = ab, \quad e_2 = bc, \quad e_3 = ad, \quad e_4 = ae, \quad e_5 = de, \quad e_6 = cf, \quad e_7 = ce, \quad e_8 = ef.$$

Entonces la matriz de incidencia es

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
a	1	0	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	0	0	1	1	0
d	0	0	1	0	1	0	0	0
e	0	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	0	1	0	1

Nuevamente, la matriz de incidencia de un grafo simple tiene una estructura particular.

Proposición. Sea G un grafo simple no dirigido y sea B su matriz de incidencia. Cada columna de B tiene exactamente dos entradas iguales a 1.

Demostración. Cada columna de B corresponde a una arista e_j . Como G es simple y no dirigido, la arista e_j tiene dos extremos distintos. Por definición de matriz de incidencia, la columna j tiene un 1 exactamente en las filas correspondientes a esos dos extremos, y tiene 0 en todas las demás filas. Por lo tanto, cada columna tiene exactamente dos entradas iguales a 1. $\square$

¿Cuál representación es mejor? La respuesta depende tanto del tamaño del grafo como de lo que queremos hacer en el grafo. Para un grafo simple con n vértices y m aristas, comparemos las representaciones explícitas anteriores por su tamaño y por la facilidad de consultar si dos vértices son adyacentes.

representación	tamaño	consultar si $uv \in E$
matriz de adyacencia	n^2 entradas	mirar una entrada
listas de adyacencia	$n + 2m$ registros	buscar v en la lista de u
matriz de incidencia	nm entradas	buscar una columna con ambos extremos

En las listas contamos un registro por vértice y dos apariciones por arista, una en la lista de cada extremo. En un grafo con pocas aristas en relación con n^2 , esta representación puede ocupar mucho menos espacio que una matriz de adyacencia.

La matriz de adyacencia es muy cómoda para preguntar rápidamente si dos vértices son adyacentes. La lista de adyacencia, en cambio, es muy natural cuando queremos recorrer los vecinos de un vértice. Estas son dos maneras distintas de guardar la misma información.

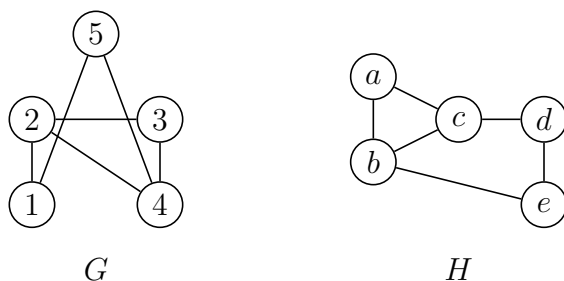
Si permitimos aristas paralelas, una entrada binaria de la matriz de adyacencia ya no registra cuántas hay. Podemos guardar esa multiplicidad en cada entrada, repetir vecinos en las listas o dedicar una columna a cada arista en la matriz de incidencia. Con la definición binaria de incidencia, un loop tiene un solo 1 en su columna; esto no cambia la convención de contarlos dos veces al calcular el grado.

Terminamos mencionando que hay versiones dirigidas para estas representaciones. En la matriz de adyacencia de un digrafo, se usa $a_{ij} = 1$ si existe el arco $v_i \rightarrow v_j$. En una lista de adyacencia se pueden guardar sólo los vecinos de salida. En una matriz de incidencia dirigida se registra cómo incide cada arco, por ejemplo distinguiendo su extremo inicial y su extremo final.

4.2.2. Isomorfismos

Una vez que hablamos de como representar un grafo: trataremos de entender la noción que dos grafos tengan la misma *estructura*. Notemos que un intento medio burdo es pensar que dos grafos tienen la misma estructura si tienen los mismos vértices y las mismas aristas. El problema con esta definición, es que uno puede simplemente cambiar los nombre (o etiquetas) de los vértices y obtener un grafo “distinto” que en realidad tiene la misma estructura.

Ejemplo. Consideremos los siguientes grafos.



Si bien, a primera vista, parecen distintos, en realidad representan la misma estructura. En efecto, podemos renombrar los vértices del primer grafo para obtener el segundo grafo. La noción formal que captura esta idea es la de isomorfismo.

Definición. Sean $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ dos grafos simples. Diremos que G y H son *isomorfos* ($G \cong H$) si existe una biyección $f: V \rightarrow V'$ tal que para todo par de vértices $u, v \in V$ tenemos que

$$uv \in E \iff f(u)f(v) \in E'.$$

En ese caso diremos que f es un *isomorfismo* entre G y H .

Un isomorfismo es un *reetiquetado* de los vértices que preserva exactamente las adyacencias. Si dos vértices estaban conectados antes del cambio de nombres, sus imágenes deben quedar conectadas después. Si dos vértices no estaban conectados antes, sus imágenes tampoco deben quedar conectadas después.

Ejemplo. Para el ejemplo anterior, un isomorfismo está dado por

$$f(1) = e, \quad f(2) = b, \quad f(3) = a, \quad f(4) = c, \quad f(5) = d.$$

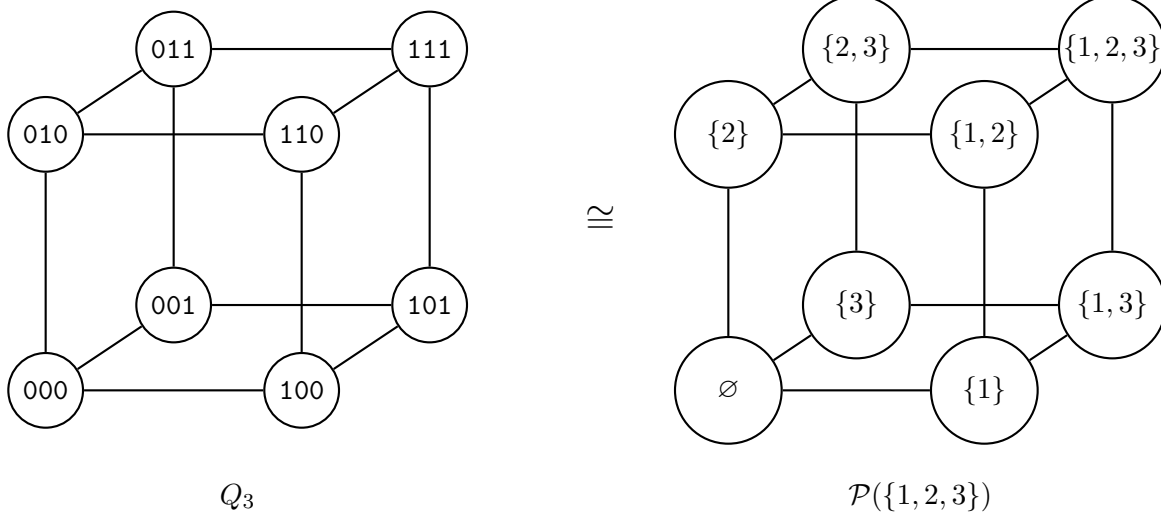
Para verificarlo, basta revisar que las aristas de G se transforman exactamente en las aristas de H :

arista de G	imagen en H
12	eb
23	ba
34	ac
45	cd
51	de
24	bc

Este concepto nos permitirá notar que ciertos grafos que tienen distintas descripciones en realidad son “el mismo” grafo (salvo por el nombre de los vértices).

Ejemplo. Para $r \in \mathbb{N}$, consideremos el grafo Q_r : sus vértices son los strings binarios de largo r , y dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada.

Consideremos también el grafo S_r cuyos vértices son los subconjuntos de $\{1, \dots, r\}$, donde dos subconjuntos son adyacentes si uno se obtiene del otro agregando un elemento. Para $r = 3$, podemos dibujar ambos grafos.



Pareciera ser que son el mismo grafo: en efecto, mostremos que $Q_r \cong S_r$. A cada string le asociamos el conjunto de posiciones donde aparece un 1:

$$f(x_1 \cdots x_r) = \{i \in \{1, \dots, r\} : x_i = 1\}.$$

Esta función es biyectiva: para recuperar el string de un subconjunto, ponemos un 1 en sus posiciones y un 0 en las demás. Además, dos strings difieren en exactamente una coordenada si y sólo si sus conjuntos de posiciones se obtienen uno del otro agregando o quitando un elemento. Por lo tanto, f preserva tanto las adyacencias como las no-adyacencias.

4.2.3. Invariantes

La mayoría (sino todas) las propiedades que nos interesarán de los grafos no dependerán de las etiquetas de los vértices, sino de la estructura del grafo. Dichas propiedades, que no dependen del etiquetado, se llaman invariantes.

Definición. Una propiedad de grafos es un *invariante* si asigna el mismo valor a grafos isomorfos.

Veamos algunos ejemplos de invariantes.

Proposición. Las siguientes son invariantes:

1. el número de vértices
2. el número de aristas
3. la cantidad de vértices de un mismo grado.

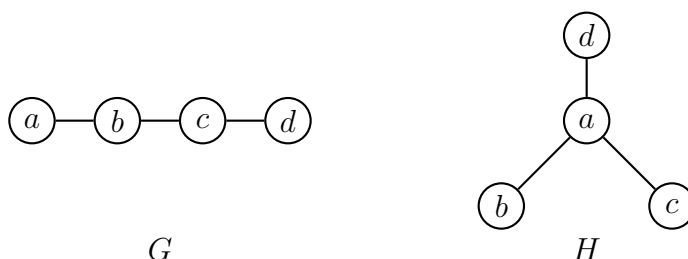
Demostración. Sea $f : V(G) \rightarrow V(H)$ un isomorfismo. Como f es una biyección, G y H tienen el mismo número de vértices.

Además, por definición de isomorfismo, cada arista uv de G determina una arista $f(u)f(v)$ de H . Recíprocamente, como f es biyectiva y preserva no-adyacencias, cada arista de H viene de una única arista de G . Por lo tanto, hay una biyección entre las aristas de G y las aristas de H , y ambos grafos tienen el mismo número de aristas.

Finalmente, fijemos un vértice $u \in V(G)$. Los vecinos de u en G son exactamente los vértices que, bajo f , se transforman en vecinos de $f(u)$ en H . Concluimos que $d_G(u) = d_H(f(u))$. Como f es una biyección entre vértices, la cantidad de vértices de cada grado coincide en ambos grafos. $\square$

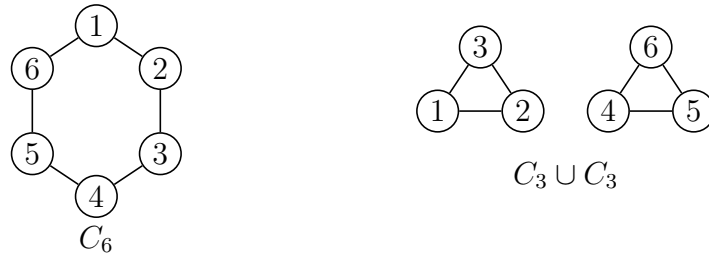
De manera interesante los invariantes nos permitirán argumentar que dos grafos **no** son isomorfos: basta con encontrar un invariante que difiera entre ambos grafos.

Ejemplo. Consideremos los siguientes grafos G y H .



Ambos tienen 4 vértices y 3 aristas. Sin embargo, los grados de sus vértices, ordenados de mayor a menor, son $(2, 2, 1, 1)$ en G y $(3, 1, 1, 1)$ en H . En particular, H tiene un vértice de grado 3 y G no tiene ninguno. Como la cantidad de vértices de cada grado es un invariante, G y H no son isomorfos.

Ejemplo. Los siguientes dos grafos tienen 6 vértices, 6 aristas y todos sus vértices tienen grado 2: es decir, respetan los tres invariantes anteriores.

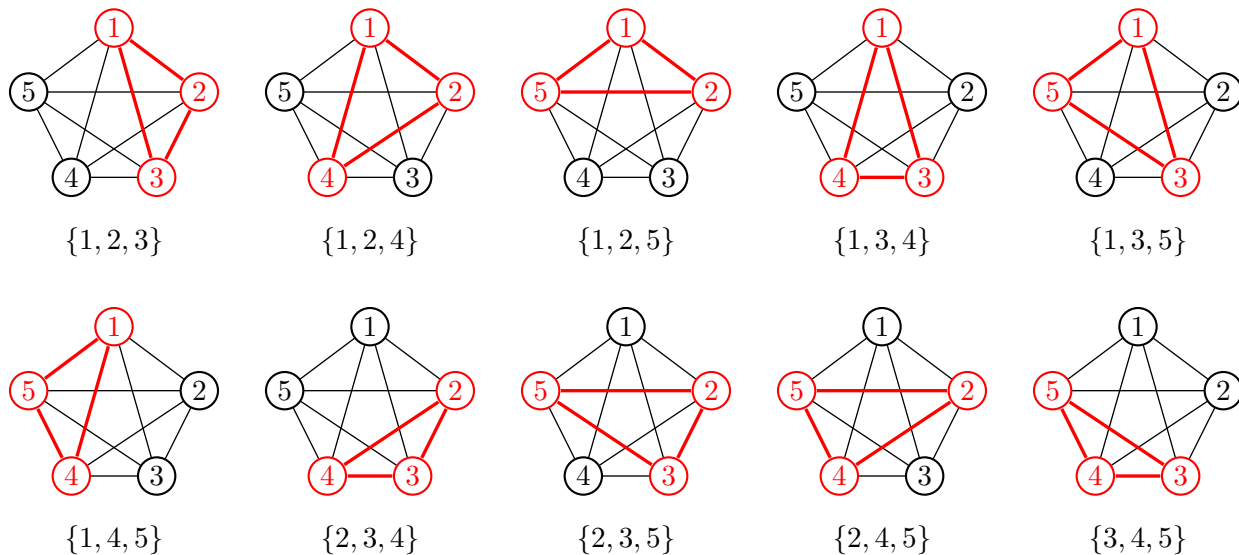


Sin embargo, esperamos que no sean isomorfos pues tienen distinta estructura: el grafo de la derecha contiene un ciclo de longitud 3, mientras que el de la izquierda no.

Veremos que contener un subgrafo es también un invariante: más aún, el número de copias de un subgrafo fijo es un invariante.

Definición. Una *copia* de un grafo simple F en un grafo simple H es un subgrafo de H isomorfo a F . Dos copias son distintas si difieren en su conjunto de vértices o en su conjunto de aristas. Decir que H contiene k copias de F significará que contiene al menos k copias distintas.

Ejemplo. Consideremos K_5 con vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Cada elección de tres vértices determina una copia de C_3 , pues los tres pares de vértices son adyacentes. Recíprocamente, cada copia de C_3 queda determinada por sus tres vértices. Luego K_5 contiene exactamente $\binom{5}{3} = 10$ copias de C_3 .



Notemos que estas copias pueden compartir vértices y aristas: por ejemplo, las de vértices $\{1, 2, 3\}$ y $\{1, 2, 4\}$ comparten la arista 12 y los vértices 1 y 2.

Contener un subgrafo (o copias de el) son invariantes, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición. Las siguientes son invariantes:

1. contener un K_ℓ como subgrafo ($\ell \geq 1$)
2. contener un P_ℓ como subgrafo ($\ell \geq 1$)
3. contener un C_ℓ como subgrafo ($\ell \geq 3$)
4. contener H como subgrafo para un grafo simple fijo H
5. contener k copias de H , para un grafo simple fijo H y un entero $k \geq 0$.

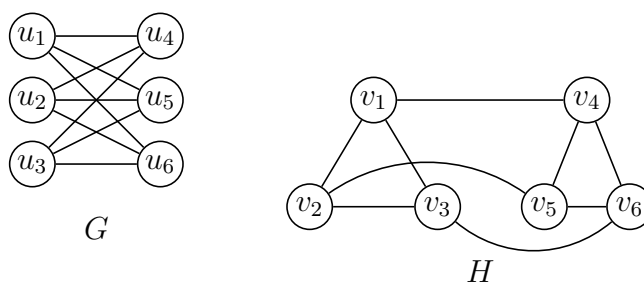
Demostración. Basta con probar la última afirmación: tomando $k = 1$ obtenemos las anteriores.

Fijemos un grafo simple H y un entero $k \geq 0$. Sea $f : V(G) \rightarrow V(G')$ un isomorfismo y sea (U, F) una copia de H en G . Su imagen es el subgrafo de G' con vértices $f(U)$ y aristas

$$\{f(u)f(v) : uv \in F\}.$$

La restricción de f a U es un isomorfismo entre ambos subgrafos. Por lo tanto, la imagen también es una copia de H . Además, podemos recuperar el subgrafo original aplicando f^{-1} . Luego esta correspondencia es una biyección entre las copias de H en G y las copias de H en G' . En particular, G contiene al menos k copias de H si y sólo si G' contiene al menos k copias de H , que es lo que queríamos probar. $\square$

Ejemplo. Los siguientes dos grafos tienen el mismo número de vértices, el mismo número de aristas y la misma secuencia de grados. De hecho, ambos tienen 6 vértices, 9 aristas, y todos sus vértices tienen grado 3. Sin embargo, no son isomorfos.



El grafo H contiene una copia de C_3 , por ejemplo la de vértices v_1, v_2, v_3 . El grafo G no contiene copias de C_3 , porque entre cualesquiera tres vértices hay dos en $\{u_1, u_2, u_3\}$ o dos en $\{u_4, u_5, u_6\}$, y esos dos no son adyacentes. Por la proposición anterior, G y H no son isomorfos.

Chequeo rápido

En las siguientes preguntas, todos los grafos son simples.

1. La suma de todas las entradas de la matriz de adyacencia de un grafo es 14. ¿Cuántas aristas tiene?
 - a) 7.
 - b) 14.
 - c) 28.

2. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo con vértices $v_1, \dots, v_n$, donde $n \geq 4$. Si $(A^2)_{24} = 3$, ¿qué podemos afirmar necesariamente?

- a) $d(v_2) = 3$. b) $|N(v_2) \cap N(v_4)| = 3$. c) $v_2v_4 \in E$.

3. ¿A qué corresponde permutar las columnas de una matriz de incidencia?

- a) Cambiar las adyacencias. b) Cambiar el orden de los vértices. c) Cambiar el orden de las aristas.

4. Dos grafos con la misma secuencia de grados son necesariamente isomorfos.

- a) Falso. b) Verdadero.

5. ¿Cuántas copias de P_3 hay en K_3 ?

- a) 0. b) 1. c) 3.

Ejercicios

1. a) Sea G el grafo con vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y aristas $\{12, 13, 23, 24, 45\}$. Escriba su matriz de adyacencia A , en ese orden de vértices, y sus listas de adyacencia. Determine $(A^2)_{14}$ y $(A^2)_{22}$ sin multiplicar matrices.
b) Para $n \geq 3$, determine cuántas copias de P_3 contiene K_n .
c) Un grafo simple tiene vértices v_1, v_2, v_3, v_4 , aristas e_1, e_2, e_3, e_4 y matriz de incidencia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con filas y columnas en los órdenes indicados. Dibuje el grafo y escriba su matriz de adyacencia. Explique cómo recuperar sus grados directamente de M .

- d) A partir del ciclo C_6 , con aristas $12, 23, 34, 45, 56, 61$, construimos G_1 agregando la arista 13 y G_2 agregando la arista 14 . ¿Son isomorfos? Justifique mediante un isomorfismo explícito o un invariante que los distinga.
e) Construya dos grafos simples no isomorfos cuya secuencia de grados sea $(3, 2, 2, 2, 1)$. Justifique que sus ejemplos no son isomorfos.
f) Sean G y H grafos simples. Demuestre que $G \cong H$ si y sólo si $\overline{G} \cong \overline{H}$.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices y m aristas. Construimos un grafo $D(G)$ con conjunto de vértices $V \times \{0, 1\}$: los vértices (u, i) y (v, j) son adyacentes si y sólo si $uv \in E$ e $i \neq j$. Es decir, hacemos dos copias del conjunto de vértices y usamos las aristas de G para conectar una copia con la otra.

- a) Dibuje $D(P_3)$.

- b) Determine el número de vértices y aristas de $D(G)$, y el grado de (v, i) en términos del grado de v en G .
- c) Sea A la matriz de adyacencia de G en el orden $v_1, \dots, v_n$. Escriba la matriz de adyacencia B de $D(G)$ en el orden

$$(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (v_1, 1), \dots, (v_n, 1).$$

Calcule B^2 en términos de A^2 e interprete sus bloques mediante vecinos comunes.

- d) Demuestre que $D(G)$ no contiene ninguna copia de C_3 , independiente del grafo G .
- e) Demuestre que $D(K_4)$ es isomorfo a Q_3 , el grafo cuyos vértices son los strings binarios de largo 3, adyacentes cuando difieren en exactamente una coordenada.
3. Sea G un grafo simple con $n \geq 1$ vértices, m aristas y matriz de adyacencia A . Denotamos por $c_4(G)$ el número de copias de C_4 en G .

- a) Demuestre que

$$c_4(G) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \binom{(A^2)_{ij}}{2}.$$

Indicación: cuente via los dos vértices opuestos del ciclo y sus dos vecinos comunes. ¿Sobrecontó?

- b) Suponga que G no contiene ninguna copia de C_4 . Demuestre que

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

Indicación: cuente de dos maneras las formas de elegir un vértice y un conjunto de dos de sus vecinos.

- c) Bajo la misma hipótesis, demuestre que

$$m \leq \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n - 3}).$$

Indicación: expanda la desigualdad $\sum_{v \in V(G)} \left(d(v) - \frac{2m}{n}\right)^2 \geq 0$.

- d) Concluya que todo grafo simple con siete vértices y once aristas contiene una copia de C_4 .