

2.2. Recursión e inducción

Definición (Producción). Sea $\mathcal{U}$ un dominio de objetos. Supongamos que tenemos:

- $B \subseteq \mathcal{U}$ *objetos base*,
- $\mathcal{F}$ *reglas de producción* donde cada $f \in \mathcal{F}$ es una función $f: \mathcal{U}^k \rightarrow \mathcal{U}$ de alguna aridad $k > 0$.

Diremos que $u \in \mathcal{U}$ se *construye* a partir de B y $\mathcal{F}$ si existe una secuencia (finita) $u_1, \dots, u_m = u$ tal que, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$,

- $u_i \in B$, (caso base)
- o bien $u_i = f(u_{j_1}, \dots, u_{j_k})$, para alguna regla $f \in \mathcal{F}$ de aridad k e índices $j_1, \dots, j_k < i$. (caso recursivo)

A la secuencia $u_1, \dots, u_m$ se le llama *producción* de u . El conjunto de todos los objetos que se construyen a partir de B y $\mathcal{F}$ se llama el *conjunto generado* por B y $\mathcal{F}$.

Definición (Fórmulas de Horn). ▪ $\perp$ y $\top$ son fórmulas de Horn.

- Si p es una variable, p es fórmula de Horn.
- Si H_1 y H_2 son fórmulas de Horn, $(H_1 \wedge H_2)$ también es una fórmula de Horn.
- Si H es una fórmula de Horn y p una variable, $(p \rightarrow H)$ es fórmula de Horn.

Definición (Árboles 1-2). Sea $\mathcal{T}_{1-2}$ el conjunto de *árboles 1-2* definido por las siguientes reglas:

- $\bullet \in \mathcal{T}_{1-2}$.
- Si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{1-2}$, entonces $\bullet(T_1) \in \mathcal{T}_{1-2}$ y $\bullet(T_1, T_2) \in \mathcal{T}_{1-2}$.

Aquí $\bullet$ representa una vértice, $\bullet(T_1)$ un árbol cuya raíz tiene un hijo y $\bullet(T_1, T_2)$ un árbol cuya raíz tiene dos hijos. Ningún otro objeto pertenece a $\mathcal{T}_{1-2}$.

Definición (Definición recursiva de una función). Sea S un conjunto de objetos construidos a partir de objetos básicos B y reglas de producción $\mathcal{F}$.

Una función $g: S \rightarrow X$ se *define recursivamente* especificando $g(b)$ para $b \in B$ y para cada regla de producción cómo obtener $g(f(s_1, \dots, s_k))$ a partir de $g(s_1), \dots, g(s_k)$.

Principio (Inducción estructural). Sea S un conjunto de objetos construidos a partir de objetos básicos B y reglas de producción $\mathcal{F}$. Sea $P(s)$ una propiedad que depende de un objeto $s \in S$ tal que se cumple lo siguiente:

- $P(b)$ es verdadera para todo $b \in B$. (caso base)
- Para toda $f \in \mathcal{F}$ de aridad k y objetos $s_1, \dots, s_k \in S$, se cumple

$$P(s_1) \wedge \dots \wedge P(s_k) \rightarrow P(f(s_1, \dots, s_k)).$$
(paso inductivo)

Entonces, $P(s)$ es verdadera para todo $s \in S$.

Ejercicios

1. a) Sea Σ un alfabeto. El conjunto Σ^* se genera a partir de ϵ mediante una regla $x \mapsto \sigma x$ por cada $\sigma \in \Sigma$. La concatenación y el largo de strings se definen mediante

$$\epsilon y = y, \quad (\sigma x)y = \sigma(xy), \quad |\epsilon| = 0, \quad |\sigma x| = |x| + 1.$$

Demuestre que $|xy| = |x| + |y|$ para todos $x, y \in \Sigma^*$.

- b) Sea BB el conjunto de strings de paréntesis generado por las siguientes reglas: $\epsilon \in \text{BB}$; si $w \in \text{BB}$, entonces $(w) \in \text{BB}$; y si $w, z \in \text{BB}$, entonces $wz \in \text{BB}$. En este inciso puede usar, sin demostrarla, la identidad $|wz| = |w| + |z|$. Demuestre que todo string $w \in \text{BB}$ tiene largo par.
 - c) En un árbol 1-2, llamaremos *hoja* a una aparición de $\bullet$ sin hijos. Demuestre que todo árbol 1-2 tiene al menos una hoja.
 - d) El conjunto de palíndromos binarios está generado a partir de $\epsilon, 0$ y 1 mediante las reglas $w \mapsto 0w0$ y $w \mapsto 1w1$. Para un string w , sean $|w|_0$ y $|w|_1$ sus números de ceros y unos, respectivamente. Demuestre que un palíndromo binario no puede tener simultáneamente $|w|_0$ y $|w|_1$ impares.
2. Una fórmula proposicional es una *y-o fórmula* si sólo usa los conectivos $\wedge$ y $\vee$.
 - a) Defina recursivamente el conjunto de y-o fórmulas.
 - b) Defina recursivamente las funciones $c(\phi)$ y $v(\phi)$ que cuente el número de conectivos y variables en una y-o fórmula, respectivamente.
 - c) Demuestre por inducción estructural que, para toda y-o fórmula ϕ , tenemos que $v(\phi) \leq c(\phi) + 1$.
 - d) Defina recursivamente la semántica de las y-o fórmulas.
 - e) Muestre que las y-o fórmulas son *monótonas*, es decir, si ϕ es una y-o fórmula y $A \subseteq B$ son conjuntos de variables, entonces $\hat{v}_A(\phi) \leq \hat{v}_B(\phi)$.
 3. Sea BB el conjunto de strings de paréntesis balanceados definido en el ejercicio 1(b). Para un string w , defina su *balance* por $b(w) = |w|_{\lceil} - |w|_{\rceil}$. Diremos que u es un *prefijo* de w si $w = uz$ para algún string z .
 - a) Demuestre por inducción estructural que, para todo $w \in \text{BB}$,

$$b(w) = 0 \text{ y } b(u) \geq 0 \text{ para todo prefijo } u \text{ de } w.$$

- b) Demuestre que todo string no vacío $w \in \text{BB}$ admite una descomposición $w = (u)v$ con $u, v \in \text{BB}$ y $u \neq \epsilon$.
- c) Muestre que la descomposición anterior es única.
- d) Los *árboles binarios* son árboles 1-2 en los que cada vértice tiene exactamente cero o dos hijos. Defina recursivamente el conjunto $\mathcal{T}_2$ de árboles binarios.
- e) Defina recursivamente una función $f: \text{BB} \rightarrow \mathcal{T}_2$ que asocie a cada string de paréntesis balanceados un árbol binario. Muestre que f es biyectiva.
Indicación: recuerde que f es biyectiva si para todo $T \in \mathcal{T}_2$ existe un único $w \in \text{BB}$ tal que $f(w) = T$.
- f) ¿Qué puede concluir sobre los árboles binarios y los strings de paréntesis balanceados?