

2.3. Inducción en los números naturales

Principio (Inducción débil). Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(0)$ es verdadera (caso base).
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Principio (Inducción desde un caso base arbitrario). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base).
- Para todo $n \geq n_0$, si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n + 1)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Principio (Inducción fuerte). Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base).
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_0$, si $P(k)$ es verdadera para todo k tal que $n_0 \leq k < n$, entonces $P(n)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Principio (Inducción fuerte con múltiples casos base). Sea $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \leq n_1$. Si $P(n)$ es una propiedad que depende de un número natural n , y se cumplen las siguientes condiciones:

- $P(n)$ es verdadera para todo n tal que $n_0 \leq n \leq n_1$ (casos base).
- Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > n_1$, si $P(k)$ es verdadera para todo k tal que $n_0 \leq k < n$, entonces $P(n)$ también es verdadera (paso inductivo).

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Principio (del buen orden). Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío de números naturales. Entonces, S tiene un elemento mínimo; es decir, existe un número natural $m \in S$ tal que $m \leq n$ para todo $n \in S$.

Ejercicios

1. a) Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

- b) Demuestre que $2^n \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.
 c) Recordemos que un entero $p \geq 2$ es *primo* si sus únicos divisores positivos son 1 y p . Demuestre que todo entero $n \geq 2$ puede escribirse como un producto de primos.
 d) Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 18$, existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $n = 4a + 7b$.

2. Dos jugadores J1 y J2 juegan el siguiente juego:

- El juego parte con un número entero $n \geq 1$ de fichas.
- Los jugadores alternan turnos, comenzando con J1.
- En cada turno, el jugador actual elige un número $r \in \{1, 2, 3\}$ y quita r fichas de la pila; es decir, reemplaza n por $n - r$.
- El jugador que quita la última ficha gana el juego.

- a) Muestre que J1 tiene una estrategia ganadora si y sólo si n no es múltiplo de 4.
 b) Suponga ahora que las reglas del juego son modificadas de la siguiente manera: En cada turno, el jugador actual elige un divisor d de n con $1 \leq d \leq n$ y quita d fichas, es decir reemplaza n por $n - d$ y el jugador que quita la última ficha **pierde** el juego. Muestre que J1 tiene una estrategia ganadora si y sólo si n es par.

3. Considere la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida como

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Una *descomposición de Zeckendorf* de un entero positivo n es un conjunto finito $I \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ que no contiene dos índices consecutivos y satisface $n = \sum_{i \in I} F_i$.

El objetivo de este problema demostrar que todo entero positivo posee una única descomposición de Zeckendorf.

- a) Demuestre que, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$,

$$F_k + F_{k-2} + F_{k-4} + \cdots = F_{k+1} - 1,$$

donde la suma termina en F_2 si k es par y en F_3 si k es impar.

- b) Demuestre que, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$, si $I \subseteq \{2, \dots, k\}$ es un conjunto finito que no contiene índices consecutivos, entonces

$$\sum_{i \in I} F_i \leq F_{k+1} - 1.$$

Indicación: le puede ser útil considerar los casos $k \in I$ y $k \notin I$.

- c)* Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, existe $k \geq 2$ tal que $F_k \leq n < F_{k+1}$.
- d)* Demuestre la existencia de una descomposición de Zeckendorf para todo entero positivo n .
- e)* Demuestre la unicidad.