

2.5. Relaciones

Definición. Una *relación (binaria)* R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$. Es decir, cada elemento de R es un par ordenado (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

Definición. Sea $R \subseteq A \times B$ una relación binaria entre dos conjuntos. El *grafo bipartito* asociado a R es el grafo cuyos vértices se dividen en dos partes, una correspondiente a los elementos de A y la otra a los elementos de B , y en el que hay una arista entre $a \in A$ y $b \in B$ si y sólo si $a R b$.

Definición. Sea $R \subseteq A \times A$ una relación binaria sobre un conjunto A . El *dígrafo* asociado a R es el grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de A y en el que hay un arco dirigido desde a hacia b si y sólo si $a R b$.

Definición. Una relación binaria R sobre un conjunto A se dirá:

- *reflexiva* si $a R a$ para todo $a \in A$.
- *simétrica* si $a R b$ implica $b R a$ para todo $a, b \in A$.
- *antisimétrica* si $a R b$ y $b R a$ implican $a = b$ para todo $a, b \in A$.
- *transitiva* si $a R b$ y $b R c$ implican $a R c$ para todo $a, b, c \in A$.

Definición. Una relación binaria R sobre un conjunto A es un *orden (parcial)* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si además para todo $a, b \in A$ se cumple que $a R b$ o $b R a$, entonces diremos que R es un *orden total*.

Definición. Una relación binaria $R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A y un elemento $a \in A$, la *clase de equivalencia* de a es el conjunto

$$[a]_R = \{b \in A : a R b\}.$$

Proposición. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Para cualquier $a, b \in A$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- $a R b$.
- $[a]_R = [b]_R$.
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Definición. Una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de un conjunto A es una *partición* de A si:

- Para todo $P \in \mathcal{P}$, se tiene $P \neq \emptyset$.
- Para todo $P, Q \in \mathcal{P}$, si $P \neq Q$, entonces $P \cap Q = \emptyset$.
- Para todo $a \in A$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $a \in P$.

Teorema. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A , el conjunto de clases de equivalencia $A/R = \{[a]_R : a \in A\}$ es una partición de A . Dicho conjunto se llama el *conjunto cociente* de A por R .

Teorema. Dada una partición $\mathcal{P}$ de un conjunto A , la relación $R_{\mathcal{P}}$ definida por

$$a R_{\mathcal{P}} b \quad \text{si y sólo si} \quad \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } a, b \in P$$

es una relación de equivalencia. Más aún, sus clases de equivalencia son exactamente los elementos de $\mathcal{P}$.

Definición. Una *relación k -aria* entre conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_k$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$. En caso que $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$, diremos que es una *relación k -aria sobre A* .

Definición. Una *función* $f : A \rightarrow B$ es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ con $(a, b) \in f$.

Definición. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y sea $a \in A$. Si $(a, b) \in f$, escribimos $f(a) = b$ y decimos que b es la *imagen* de a . En este caso, también diremos que a es una *preimagen* de b . El conjunto A se llama el *dominio* de f , y el conjunto

$$\{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$$

se llama la *imagen* de f .

Definición. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es:

- *inyectiva* si para todos $a_1, a_2 \in A$, de $a_1 \neq a_2$ se sigue que $f(a_1) \neq f(a_2)$;
- *sobreyectiva* si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$;
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones. La *composición* de f y g es la función $g \circ f : A \rightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces existe una función $f^{-1} : B \rightarrow A$ llamada la *inversa* de f , tal que

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{para todo } a \in A, \quad f(f^{-1}(b)) = b \quad \text{para todo } b \in B.$$

Proposición. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones.

- Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Ejercicios

1. En una plataforma de desarrollo de software consideremos los siguientes conjuntos:

- D : el conjunto de desarrolladores,
- M : el conjunto de módulos del sistema,
- T : el conjunto de tareas de compilación,
- S : el conjunto de archivos fuente.

Definimos las siguientes relaciones:

- Para $d \in D$ y $m \in M$, escribimos $d A m$ si el desarrollador d tiene permiso de escritura sobre el módulo m .
 - Para $t_1, t_2 \in T$, escribimos $t_1 \preceq t_2$ si completar t_1 es prerequisite directo o indirecto para completar t_2 , o bien $t_1 = t_2$.
 - Para $s_1, s_2 \in S$, escribimos $s_1 \sim s_2$ si al eliminar espacios en blanco y comentarios de ambos archivos, los resultados coinciden exactamente.
- a) Indique, para cada una de las tres relaciones, si se trata de una relación entre dos conjuntos distintos o de una relación sobre un solo conjunto.
 - b) Para cada relación, indique cuál de las representaciones vistas en clases es la más natural: tabla, grafo bipartito o dígrafo. Justifique brevemente.
 - c) Suponiendo que el sistema de compilación es consistente, ¿qué propiedades de relaciones esperaría que satisfaga $\preceq$? Concluya qué tipo de relación es.
 - d) Explique por qué $\sim$ modela una noción de equivalencia entre archivos fuente y describa qué representan sus clases de equivalencia.

2. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de fórmulas bien formadas sobre un conjunto de variables proposicionales. Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathcal{F}$ por

$$\phi \sim \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \phi \leftrightarrow \psi \text{ es una tautología.}$$

- a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia. ¿Quiénes son las clases de equivalencia de $\sim$?
- b) Definimos ahora una relación $\preceq$ sobre $\mathcal{F}/\sim$ por

$$[\phi]_{\sim} \preceq [\psi]_{\sim} \quad \text{si y sólo si} \quad (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \psi \quad \text{es una tautología.}$$

Demuestre que $\preceq$ está bien definida, es decir, que no depende de los representantes elegidos de cada clase de equivalencia.

- c) Demuestre que $\preceq$ es un orden sobre $\mathcal{F}/\sim$.
- d) ¿Es $\preceq$ un orden total? Justifique su respuesta.
3. Sea A un conjunto finito y $\preceq$ un orden en A . Decimos que x es un *predecesor inmediato* de y si $x \preceq y$, $x \neq y$, y no existe $z \in A$ tal que $x \preceq z \preceq y$ con $z \neq x, y$. El *diagrama de Hasse* de $(A, \preceq)$ es el grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de A y dónde hay un arco dirigido de x hacia y si y sólo si x es un predecesor inmediato de y .

- a) Demuestre que en cualquier conjunto finito parcialmente ordenado, la relación $\preceq$ puede recuperarse a partir del diagrama de Hasse: más precisamente, pruebe que $x \preceq y$ si y sólo si existe un camino dirigido de x a y en el diagrama de Hasse, o bien $x = y$.

Indicación: Un camino dirigido de x a y es una secuencia en A : $x = a_1, a_2, \dots, a_k = y$ con $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k$ en el diagrama de Hasse.

- b) ¿Puede un diagrama de Hasse contener ciclos dirigidos de largo $\ell \geq 2$? Justifique su respuesta.

Indicación: Un ciclo dirigido de largo ℓ es una secuencia en A : $a_1, \dots, a_\ell$ con $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_\ell \rightarrow a_1$ en el diagrama de Hasse.