

2.6. Operaciones con relaciones

Definición (Operaciones clásicas). Sean $R, S \subseteq A \times B$ relaciones entre los conjuntos A y B . Definimos:

- la *unión* $R \cup S$ como el conjunto de pares que pertenecen a R , a S o a ambas;
- la *intersección* $R \cap S$ como el conjunto de pares que pertenecen simultáneamente a R y a S ;
- la *diferencia* $R \setminus S$ como el conjunto de pares que pertenecen a R pero no a S .

Definición. Sea $R \subseteq A \times B$ una relación. La *relación inversa* de R es

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

Si además $S \subseteq B \times C$ es otra relación, entonces la *composición* de R y S es la relación

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\}.$$

Potencias de una relación

Definición. Sea R una relación sobre un conjunto A y sea $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$ la relación igualdad sobre A . Las potencias de R se definen recursivamente por

$$R^0 = \Delta_A, \quad R^{n+1} = R^n \circ R \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definición. Sea R una relación sobre un conjunto A . La *clausura reflexiva* (resp. *simétrica*, *transitiva*, *reflexiva-transitiva*) de R es una relación T tal que:

- T es reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva);
- $R \subseteq T$;
- si T' es otra relación reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva) con $R \subseteq T'$, entonces $T \subseteq T'$.

En otras palabras, la clausura reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva) de R es la relación reflexiva (resp. simétrica, transitiva, reflexiva-transitiva) más pequeña que contiene a R .

Denotaremos las clausuras reflexiva, simétrica, transitiva y reflexiva-transitiva de R por R^{ref} , R^{sym} , R^+ y R^* , respectivamente.

Teorema. Sea R una relación sobre un conjunto A . Entonces:

- la clausura reflexiva de R es $R^{\text{ref}} = R \cup R^0$;

- la clausura simétrica de R es $R^{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;
- la clausura transitiva de R está dada por

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n;$$

- la clausura reflexiva-transitiva de R se denota por R^* y está dada por

$$R^* = R^0 \cup R^+ = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Proposición. Sea R una relación sobre un conjunto finito A con n elementos. Entonces

$$R^+ = \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i.$$

De manera similar, la clausura reflexiva-transitiva de R se puede escribir como

$$R^* = \bigcup_{0 \leq i \leq n} R^i.$$

Ejercicios

1. En una arquitectura de microservicios consideremos el conjunto

$$S = \{\text{Gateway}, \text{Auth}, \text{Orders}, \text{Billing}, \text{DB}\}.$$

Definimos una relación D sobre S por

$$x D y \quad \text{si y sólo si} \quad x \text{ llama directamente a } y.$$

Suponga que

$$D = \{(\text{Gateway}, \text{Auth}), (\text{Gateway}, \text{Orders}), (\text{Orders}, \text{Billing}), (\text{Auth}, \text{DB}), (\text{Billing}, \text{DB})\}.$$

- a) ¿Cuál es la representación vista en clases más natural para esta relación: tabla, grafo bipartito o dígrafo? Justifique brevemente.
- b) Calcule D^2 e interprete el significado de cada par que aparece en esa relación.
- c) Describa en palabras qué modela la clausura transitiva D^+ .
- d) Determine qué pares deben agregarse a D para obtener D^+ .
- e) Explique qué información adicional agrega la clausura reflexiva-transitiva D^* con respecto a D^+ .

2. Sea R una relación sobre un conjunto A . Diremos que la *clausura de equivalencia* de R es la menor relación de equivalencia sobre A que contiene a R .¹

- a) Sea S una relación simétrica sobre A . Demuestre que S^* es una relación de equivalencia.
- b) Concluya que $(R^{\text{sym}})^*$ es una relación de equivalencia que contiene a R .
- c) Sea E una relación de equivalencia sobre A tal que $R \subseteq E$. Demuestre que $(R^{\text{sym}})^* \subseteq E$.
- d) Concluya que la clausura de equivalencia de R es $R^{\text{eq}} = (R^{\text{sym}})^*$.
- e) Demuestre que $a R^{\text{eq}} b$ si y sólo si existen elementos

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$$

para algún $n \geq 0$, tales que para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ se cumple que $a_i R a_{i+1}$ o $a_{i+1} R a_i$.

- f) En el caso finito, interprete esta caracterización de la clausura de equivalencia en términos de dígrafos y describa las clases de equivalencia de R^{eq} en términos de caminos no dirigidos en el dígrafo asociado a R .

3. Sea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y sea R una relación sobre A . La *matriz de adyacencia* de R es la matriz binaria $M_R = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ definida por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i R j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $M = (m_{ij})$ y $N = (n_{ij})$ son matrices binarias de tamaño $n \times n$, definimos su *producto booleano* $M \odot N = P = (p_{ij})$ por

$$p_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (m_{ik} \wedge n_{kj}).$$

- a) Demuestre que si S es otra relación sobre A , entonces $M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$.
- b) Defina recursivamente las potencias booleanas de una matriz por

$$M_R^{\odot 1} = M_R, \quad M_R^{\odot(t+1)} = M_R \odot M_R^{\odot t}.$$

Demuestre que $M_{R^t} = M_R^{\odot t}$ para todo $t \geq 1$.

- c) Explique qué significa que la entrada (i, j) de $M_R^{\odot t}$ sea igual a 1.
- d) Describa, en términos de matrices booleanas, una matriz que represente la clausura transitiva R^+ .

¹Como en las otras clausuras esto significa que la clausura de equivalencia de R es una relación de equivalencia E tal que $R \subseteq E$, y si E' es otra relación de equivalencia con $R \subseteq E'$, entonces $E \subseteq E'$.