

3.1. Principio multiplicativo y problemas de conteo

Principio. Supongamos que un procedimiento consta de $k \geq 1$ tareas sucesivas $T_1, \dots, T_k$. Si

- la tarea T_1 puede realizarse de n_1 maneras,
- Para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, una vez fijadas las tareas $T_1, \dots, T_{i-1}$ la tarea T_i puede realizarse de n_i maneras.

Entonces, el procedimiento puede realizarse de $n_1 \dots n_k$ formas.

Principio. Si $A_1, \dots, A_k$ son conjuntos finitos. Entonces,

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \dots |A_k|.$$

Definición. Sea X un conjunto finito. Una *lista (ordenada)* de X de largo k es una secuencia con k elementos $x_1, \dots, x_k$ con $x_i \in X$ para todo i .

Teorema. El número de listas de largo k de un conjunto de n elementos es n^k , para $n, k \in \mathbb{N}$, con la convención $0^0 = 1$.

Definición. Sea X un conjunto finito. Una *permutación* de X es una lista ordenada que contiene todos los elementos de X **exactamente** una vez.

Teorema. El número de permutaciones de un conjunto de n elementos es

$$n! = \prod_{i=1}^n i = n \cdot \dots \cdot 1 \quad (n \geq 1).$$

Para $n = 0$, se tiene $0! = 1$.

Definición. Sea X un conjunto finito. Una *k -permutación* de X es una lista de largo k donde cada elemento aparece a lo más una vez.

Teorema. El número de k -permutaciones de un conjunto de n elementos es

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Definición. Sea $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ un conjunto finito y $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$. Una *$\vec{a}$ -multipermutación* de X es una lista ordenada que contiene el objeto x_i **exactamente** a_i veces.

Teorema. Sea $\vec{a} \in \mathbb{N}^k$ y $n = \sum_{i=1}^k a_i$, con $k \geq 1$. El número de $\vec{a}$ -multipermutaciones de un conjunto de k elementos es

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}.$$

Definición. Sea X un conjunto finito. Los k -conjuntos de X son los subconjuntos de X de tamaño k .

Teorema. El número de k -conjuntos de un conjunto de n elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k, n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Definición. Sea X un conjunto finito. Los k -multiconjuntos de X son “subconjuntos” de X donde cada objeto puede aparecer repetidas veces y el número total de objetos es k .

Teorema. El número de k -multiconjuntos de un conjunto de n elementos es

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} = \binom{n+k-1}{k} \quad (n \geq 1, k \in \mathbb{N}).$$

Ejercicios

1. a) Sea A un conjunto con $|A| = n$. Determine, como función de n , cuántas relaciones sobre A son reflexivas, cuántas son simétricas, cuántas son simultáneamente reflexivas y simétricas, y cuántas son antisimétricas.
- b) Hay m pares distinguibles de calcetines, y los dos calcetines de cada par también son distinguibles. Se escogen $2k$ calcetines, donde $0 \leq k \leq m$, y se exige obtener exactamente x pares completos, donde $x \in \mathbb{N}$. Determine el rango de valores de x para los que esto es posible y, para cada uno de ellos, una fórmula para la cantidad de selecciones.
- c) Sean $t \geq 1$ y $d_1, \dots, d_t \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq i \leq t$, sea L_i una lista de d_i símbolos, y suponga que todos los símbolos que aparecen en estas listas son distintos. Una *intercalación* de $L_1, \dots, L_t$ es una lista que contiene todos sus símbolos y conserva el orden relativo de los símbolos de cada L_i . Determine, en términos de $d_1, \dots, d_t$, cuántas intercalaciones existen.
- d) Sean $n \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Se distribuyen r objetos indistinguibles en n cajas distinguibles, y la caja i debe recibir al menos b_i objetos para cada $i \in [n]$. Determine cuándo es posible realizar la distribución y, en ese caso, una fórmula para la cantidad de distribuciones.
- e) Determine el número total de anagramas distintos de MISSISSIPPI y el número de ellos en que no aparecen dos letras I consecutivas.

2. Sean $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ y $[s] = \{1, \dots, s\}$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Una *cadena de largo t* es una lista de subconjuntos

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_t \subseteq [n].$$

- Determine cuántas cadenas de largo t existen.
- Suponga que $n \geq 1$ y tome $t = n$. Cuentas las cadenas que satisfacen $|A_i| = i$ para todo $i \in [n]$.
- Fije enteros $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_t \leq n$. Cuentas las cadenas que satisfacen $|A_i| = s_i$ para todo $i \in [t]$.
- Para $0 \leq r \leq n$, cuente las cadenas que satisfacen $|A_1| = r$.
- Diremos que dos cadenas $(A_1, \dots, A_t)$ y $(B_1, \dots, B_t)$ son *equivalentes bajo reetiquetado* si existe una biyección $\sigma: [n] \rightarrow [n]$ tal que

$$B_i = \{\sigma(x) : x \in A_i\} \quad \text{para todo } i \in [t].$$

Demuestre que esta es una relación de equivalencia y que dos cadenas son equivalentes si y sólo si $|A_i| = |B_i|$ para todo $i \in [t]$. ¿Cuántas clases de equivalencia existen y cuántas cadenas hay en cada clase?

3. Sea $n \in \mathbb{N}$, $[n] = \{1, \dots, n\}$ y R una relación sobre $[n]$. Una permutación de $[n]$ *respetas* R si, para cada $a R b$, el elemento b aparece inmediatamente después de a .

- Para $n = 7$ y $R = \{(1, 4), (4, 2), (6, 3)\}$, cuente las permutaciones que respetan R . ¿Qué ocurre si se agrega el par $(2, 1)$ a R ?
- Demuestre que, si existe una permutación que respeta R , se cumplen las tres condiciones siguientes:
 - $(i R j \wedge i R k) \implies j = k$ para todos $i, j, k \in [n]$;
 - $(j R i \wedge k R i) \implies j = k$ para todos $i, j, k \in [n]$;
 - $i R^+ i$ para todo $i \in [n]$.
- Suponga que se cumplen esas tres condiciones y considere $S = (R \cup R^{-1})^*$. Demuestre que S es una relación de equivalencia y que cada clase C de S admite una única lista $(c_1, \dots, c_m)$ que contiene todos los elementos de C exactamente una vez y satisface $c_j R c_{j+1}$ para todo $1 \leq j < m$.
- Demuestre que S tiene exactamente $n - |R|$ clases de equivalencia.
- Explique por qué los elementos de cada clase de S deben aparecer consecutivamente, en el orden determinado por R , en toda permutación que respeta R . Deduzca una fórmula para la cantidad de permutaciones que respetan R .