

3.3. Principio biyectivo y del palomar

Principio. Si A y B son conjuntos finitos y existe una biyección $f: A \rightarrow B$, entonces $|A| = |B|$.

Proposición. Para $m, n, r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Proposición. Para $n, r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r \leq n$,

$$\sum_{j=r}^n \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Lema. Sea $r \in \mathbb{N}$ y $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$. Si $P(a_1, \dots, a_r) = Q(a_1, \dots, a_r)$ para todo $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$, entonces $P = Q$.

Teorema. Para $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Principio. Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $m > k \geq 1$. Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

Principio. Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$. Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ objetos.

Principio. Sean $n \geq 1$ un entero y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

En particular, algún término es menor o igual que el promedio y algún término es mayor o igual que él.

Ejercicios

1. a) Sean $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$. Demuestre combinatorialmente que

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} 2^{n-r}.$$

- b) Sea A un conjunto con $n \geq 1$ elementos. Demuestre (sin usar el teorema del binomio) que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

- c) Sean $p_1, \dots, p_r$ primos distintos, con $r \geq 1$. Se eligen $2^r + 1$ enteros positivos distintos cuyos factores primos son un subconjunto de $\{p_1, \dots, p_r\}$. Demuestre que el producto de dos de los números elegidos es un cuadrado perfecto.
- d) Sea $q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$. Se colorean con q colores los puntos de una grilla de $q+1$ filas y $q \binom{q+1}{2} + 1$ columnas. Demuestre que existen dos filas y dos columnas cuyas cuatro intersecciones tienen el mismo color.
- e) Para $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, extendemos la notación $(a)_b$ a los números reales mediante

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_k = x(x-1) \cdots (x-k+1) \quad (k \geq 1).$$

Demuestre combinatorialmente que, para $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}.$$

2. Sea $n \geq 4$ un entero y $W_n = \{0, 1\}^n$. La *reducción* de una palabra w se obtiene reemplazando cada bloque maximal de símbolos consecutivos iguales por un solo símbolo. Por ejemplo, la reducción de 000110001 es 0101. Denotemos esta reducción por $\rho(w)$ y su largo por $r(w)$. Definimos una relación sobre W_n mediante

$$u \sim v \iff \rho(u) = \rho(v).$$

- a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- b) Muestre que hay $\frac{2^{n-1}}{n}$ palabras con la misma reducción.
- c) ¿Cuántas palabras hay en una clase de cuya reducción tiene largo r ? Use esto para probar combinatorialmente que

$$\sum_{r=1}^n 2 \binom{n-1}{r-1} = 2^n.$$

- d) Demuestre combinatorialmente que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{w \in W_n} x^{r(w)-1} = 2(1+x)^{n-1}.$$

Indicación: cuente los pares (w, λ) donde $w \in \{0, 1\}^n$ y λ asigna una de $x \in \mathbb{N}$ etiquetas a las posiciones donde w cambia de símbolo.

e) Sea $X \subseteq W_n$ un subconjunto de $4n$ palabras. Muestre que X contiene tres palabras u, v, w tales que $\rho(u) = \rho(v) = \rho(w)$.

3. Sean $n, q \geq 2$ enteros y $W = \{1, \dots, q\}^n$. Para $u, v \in W$, definimos su *distancia de Hamming* como

$$d(u, v) = |\{i \in [n] : u_i \neq v_i\}|.$$

a) ¿Cuántas palabras $v \in W$ hay a distancia k de una palabra fija $u \in W$?

b) Demuestre combinatorialmente la identidad

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} x^k = n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

c) Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de W con $|\mathcal{C}| > q^{n-1}$. Muestre que existen $c, c' \in \mathcal{C}$ distintos con $d(c, c') \leq 1$.

d) Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de W . Definimos $B_r(u) = \{v \in W : d(u, v) \leq r\}$ y $V_r = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} (q-1)^k$. Demuestre que existe $u \in W$ tal que

$$|\mathcal{C} \cap B_r(u)| \geq \left\lceil \frac{MV_r}{q^n} \right\rceil.$$

Deduzca que, si $MV_r > q^n$, existen $c, c' \in \mathcal{C}$ distintos con $d(c, c') \leq 2r$.

e) Para cada $u \in W$, sea $T(u) = \sum_{c \in \mathcal{C}} d(u, c)$. Muestre que existen $u, v \in W$ tales que

$$T(u) \leq \frac{Mn(q-1)}{q} \leq T(v).$$