

3.4. Recurrencias y fórmulas explícitas

Definición. Una *(relación de) recurrencia* para una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ es una relación que expresa a_n en términos de a_k para $k < n$.

Muchas veces la recurrencia vendrá acompañada de *condiciones iniciales*, que son valores específicos de a_k para algunos $k < n$.

Definición. Un *sistema de recurrencias* es una colección de sucesiones definidas recursivamente de manera *simultánea*. Las ecuaciones de una sucesión pueden depender de los términos anteriores de las otras sucesiones del sistema.

Inspección. Consiste en “adivinar” una fórmula para a_n a partir de los primeros valores de la sucesión, y luego verificar que esta fórmula es efectivamente una solución a la recurrencia vía inducción.

Expansión. Consiste en “desenrollar” la recurrencia, es decir, escribir a_n en términos de a_{n-1} , luego escribir a_{n-1} en términos de a_{n-2} , y así sucesivamente, hasta llegar a los casos base.

Cambio de variable. Consiste en definir una nueva sucesión b_n a partir de la sucesión a_n de manera que la recurrencia para b_n sea más fácil de resolver que la recurrencia para a_n .

3.4.6. Ejercicios

1. a) Para $n \geq 0$, sea c_n el número de formas de cubrir un tablero de $1 \times n$ casillas con fichas indistinguibles de 1×2 y 1×1 , sin dejar huecos ni superponer fichas. Plantee una recurrencia para c_n .
- b) Para $n \geq 0$, sea d_n el número de formas de cubrir un tablero de $2 \times n$ casillas con fichas indistinguibles de 1×2 , sin dejar huecos ni superponer fichas. Plantee una recurrencia para d_n .
- c) Resuelva la recurrencia

$$t_0 = 2, \quad t_1 = q - 1, \quad t_n = (q - 1)t_{n-1} + qt_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

- d) Resuelva la recurrencia

$$s_0 = 0, \quad s_n = 2s_{n-1} + n^2 \quad (n \geq 1).$$

- e) Sea $A \in \mathbb{R}$. Resuelva la recurrencia

$$x_0 = A, \quad x_n = (n + 1)x_{n-1} + (n + 1)! \quad (n \geq 1).$$

2. a) Una palabra es un *palíndromo* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Sea p_n el número de palíndromos de largo n sobre un alfabeto $\{1, \dots, q\}$. De una recurrencia para p_n y obtenga una fórmula explícita.

- b) Una palabra tiene *única corrida de unos* si tiene al menos un uno, y todos los unos aparecen consecutivos. Sea u_n el número de palabras de largo n sobre un alfabeto $\{1, \dots, q\}$ que tienen única corrida de unos. De una recurrencia para u_n y obtenga una fórmula explícita.
- c) Sea v_n el número de palabras de largo n sobre un alfabeto $\{1, \dots, q\}$ que contienen un único uno. De una recurrencia para v_n y obtenga una fórmula explícita.
3. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ sucesiones y sea $(x_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por un valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$ y la recurrencia

$$x_n = a_n x_{n-1} + b_n \quad (n \geq 1).$$

- a) Use expansión para concluir que, para todo $n \geq 0$,

$$x_n = x_0 \prod_{j=1}^n a_j + \sum_{k=1}^n \left(b_k \prod_{j=k+1}^n a_j \right).$$

- b) Suponga ahora que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Busque una sucesión $(\mu_n)_{n \geq 0}$ de números no nulos, con $\mu_0 = 1$, tal que el cambio de variable $y_n = \mu_n x_n$ dé

$$y_n = y_{n-1} + \mu_n b_n.$$

Recupere la fórmula del inciso a) resolviendo la recurrencia de tipo suma.

- c) Busque ahora un cambio de variable $z_n = x_n + c_n$. Fije $c_0 = 0$ y determine qué recurrencia debe satisfacer c_n para que

$$z_n = a_n z_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Recupere la fórmula del inciso a) resolviendo la recurrencia de tipo producto.

Consideremos ahora una recurrencia de orden $r \geq 2$, donde para todo $n \geq r$ se tiene

$$x_n = a_{n,1} x_{n-1} + \dots + a_{n,r} x_{n-r} + b_n$$

con coeficientes reales y valores iniciales $x_0, \dots, x_{r-1}$.

- d) Defina

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-r+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r.$$

Construya una matriz A_n de tamaño $r \times r$ tal que para $n \geq r$ se tenga

$$\mathbf{u}_n = A_n \mathbf{u}_{n-1} + b_n \mathbf{e}_1.$$

- e) Para $n \geq k \geq r-1$, defina $\Phi_{n,k}$ como el producto de matrices $A_n A_{n-1} \dots A_{k+1}$, y defina $\Phi_{k,k} = I_r$, donde I_r es la matriz identidad de tamaño $r \times r$. Demuestre que para $n \geq r-1$ se tiene

$$\mathbf{u}_n = \Phi_{n,r-1} \mathbf{u}_{r-1} + \sum_{k=r}^n \Phi_{n,k} b_k \mathbf{e}_1.$$

Explique cómo obtener x_n de esta fórmula.

- f) ¿Puede obtener análogos del inciso b) y del inciso c) para la recurrencia de orden r ?