

### 3.5. Funciones generatrices ordinarias

**Definición.** Sea  $(a_n)_{n \geq 0}$  una sucesión. La *función generatriz ordinaria* de  $(a_n)_{n \geq 0}$  es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Escribiremos  $[x^n]A(x) = a_n$  para indicar el coeficiente de  $x^n$  en  $A(x)$ .

**Definición.** Para una proposición  $P$ , definimos el *corchete de Iverson*  $[P]$  como

$$[P] = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ es verdadera,} \\ 0 & \text{si } P \text{ es falsa.} \end{cases}$$

**Definición.** Sean  $A(x)$  y  $B(x)$  las funciones generatrices ordinarias de las sucesiones  $(a_n)_{n \geq 0}$  y  $(b_n)_{n \geq 0}$ , respectivamente. Para  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n, \\ \lambda A(x) &= \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n, \\ x^k A(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+k} = \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^n. \end{aligned}$$

**Proposición** (Catálogo de FGO). Las siguientes identidades valen como identidades de funciones generatrices ordinarias:

- Si  $a_n = c$ , entonces  $A(x) = \frac{c}{1-x}$ .
- Si  $a_n = (-1)^n$ , entonces  $A(x) = \frac{1}{1+x}$ .
- Si  $a_n = r^n$ , entonces  $A(x) = \frac{1}{1-rx}$ .
- Si  $a_n = \binom{m}{n}$ , con  $m \in \mathbb{N}$  fijo y  $\binom{m}{n} = 0$  para  $n > m$ , entonces  $A(x) = (1+x)^m$ .
- Si  $a_n = [n = 0]$ , entonces  $A(x) = 1$ .
- Si  $a_n = [n = t]$ , con  $t \in \mathbb{N}$ , entonces  $A(x) = x^t$ .
- Si  $a_n = [d \mid n]$ , con  $d \in \mathbb{N}$  y  $d \geq 1$ , entonces  $A(x) = \frac{1}{1-x^d}$ .

#### 3.5.3. Ejercicios

1. Encuentre la función generatriz ordinaria de cada sucesión.

a)  $a_n = \alpha \cdot r^n - \beta$  para  $n \geq 0$ , donde  $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$ .

- b)  $b_n = \alpha \binom{m}{n} + \beta$  para  $n \geq 0$ , donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $m \in \mathbb{N}$ .
- c) Una alarma se activa en los tiempos múltiplos de 3 y además se activa dos veces en el tiempo 5. Sea  $c_n$  el número de activaciones en el tiempo  $n$ .

Sea  $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Expresé en términos de  $A(x)$  la función generatriz de cada sucesión.

d)  $b_0 = b_1 = 0$  y  $b_n = a_{n-2}$  para  $n \geq 2$ .

e)  $c_n = a_{n+1}$  para  $n \geq 0$ .

f)  $d_0 = 5$  y  $d_n = a_n$  para  $n \geq 1$ .

2. Decimos que una palabra sobre el alfabeto  $\{a, b, c, d\}$  es *codificada* si se puede obtener concatenando bloques de los siguientes tipos:  $[a]$ ,  $[b]$ ,  $[cd]$ . Por ejemplo,  $acdba$  es codificada, pues se descompone como

$$[a] [cd] [b] [a],$$

mientras que  $acdbd$  no es codificada.

Sea  $a_n$  la cantidad de palabras codificadas de largo  $n$  (considere que  $a_0 = 1$ ).

a) Calcule  $a_1$  y  $a_2$ .

b) Demuestre que, para  $n \geq 2$ ,

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}.$$

c) Sea  $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Demuestre que

$$A(x) = \frac{1}{1 - 2x - x^2} = \frac{1}{1 - x(2 + x)}.$$

d) Use el inciso anterior para concluir que

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}.$$

e) Use fracciones parciales para obtener una fórmula cerrada para  $a_n$ .

3. Una función generatriz  $A(x)$  es *racional* si se puede escribir como  $A(x) = P(x)/Q(x)$ , donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios y  $Q(0) \neq 0$ .

Mostraremos en este problema que la función generatriz de una sucesión  $(a_n)_{n \geq 0}$  es racional si y solo si existen enteros  $N \geq k \geq 1$  y constantes  $c_1, \dots, c_k$  tales que

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

a) Suponga que  $A(x)$  es racional, y escriba  $A(x) = P(x)/Q(x)$  con  $Q(0) \neq 0$ .

i) Muestre que puede asumir sin pérdida de generalidad que  $Q(x) = 1 - c_1 x - \dots - c_k x^k$  para algunas constantes  $c_1, \dots, c_k$ .

ii) ¿Cuál es el coeficiente de  $x^n$  en  $Q(x)A(x)$ ?

iii) Concluya que  $(a_n)_{n \geq 0}$  satisface

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

para todo  $n \geq N$ , donde  $N$  es suficientemente grande.

b) Recíprocamente, suponga que  $(a_n)_{n \geq 0}$  satisface

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

- 1) Defina  $Q(x) = 1 - c_1 x - \cdots - c_k x^k$ . Pruebe que si  $n \geq N$ , el coeficiente de  $x^n$  en  $Q(x)A(x)$  es cero.
- 2) Concluya que  $A(x)$  es racional.