

3.6. Convolución y binomio generalizado

Definición. Sean $a = (a_n)_{n \geq 0}$ y $b = (b_n)_{n \geq 0}$ dos sucesiones. Su *convolución* es la sucesión $a \star b = (c_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$c_n = (a \star b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Escribiremos también $a_n \star b_n$ como abreviación de $(a \star b)_n$.

Proposición. Sean

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

Entonces

$$A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n \star b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Es decir, el producto $A(x)B(x)$ es la función generatriz de la convolución de las dos sucesiones.

Definición. Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos el *coeficiente binomial generalizado* como

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2) \cdots (r-k+1)}{k!},$$

con la convención $\binom{r}{0} = 1$.

Proposición. Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \geq 1$, se cumplen las siguientes identidades:

1. $k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$.
2. $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$.

Proposición. Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \geq 1$, se cumplen las siguientes identidades:

1. $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$.
2. $\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$.

Teorema (Teorema del binomio generalizado). Para $r \in \mathbb{R}$, se cumple la identidad de series formales

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Proposición (Catálogo de FGO). Las siguientes identidades valen como identidades de funciones generatrices ordinarias:

- Si $a_n = c$, entonces $A(x) = \frac{c}{1-x}$.
- Si $a_n = (-1)^n$, entonces $A(x) = \frac{1}{1+x}$.
- Si $a_n = r^n$, entonces $A(x) = \frac{1}{1-rx}$.
- Si $a_n = \binom{m}{n}$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo y $\binom{m}{n} = 0$ para $n > m$, entonces $A(x) = (1+x)^m$.
- Si $a_n = n+1$, entonces $A(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Si $a_n = [n=0]$, entonces $A(x) = 1$.
- Si $a_n = [n=t]$, con $t \in \mathbb{N}$, entonces $A(x) = x^t$.
- Si $a_n = [d \mid n]$, con $d \in \mathbb{N}$ y $d \geq 1$, entonces $A(x) = \frac{1}{1-x^d}$.
- Si $a_n = \binom{n+m-1}{n}$, con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ fijo, entonces $A(x) = \frac{1}{(1-x)^m}$.
- Si $a_n = \binom{r}{n}$, con $r \in \mathbb{R}$ fijo, entonces $A(x) = (1+x)^r$.
- Si $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, entonces $A(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

3.6.3. Ejercicios

1. a) Use funciones generatrices para encontrar una fórmula cerrada para cada sucesión. Considere $r > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = ra_n + r^n$ para $n \geq 0$.

- 2) $b_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$b_n = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} b_k.$$

- 3) $c_0 = 1$ y, para $n \geq 1$,

$$c_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} r^k c_{n-1-k}.$$

- b) Tenemos monedas de 1 peso y de d pesos, donde $d \geq 2$ es un entero fijo. Sea m_n el número de formas de pagar exactamente n pesos si no importa el orden de las monedas.

- 1) Escriba la función generatriz ordinaria de $(m_n)_{n \geq 0}$ como producto de dos series geométricas.

- 2) Deduzca una fórmula cerrada para m_n .
- c) Calcule los siguientes coeficientes binomiales generalizados. Considere $m \geq 1$ entero, $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$.
- 1) $\binom{1/2}{4}$.
 - 2) $\binom{-m}{k}$.
 - 3) $\binom{r}{3}$.
- d) Use el teorema del binomio generalizado para encontrar los primeros cuatro términos no nulos de cada función generatriz. Considere $r > 0$ y $m \geq 1$ entero.
- 1) $(1 - rx)^{-2}$.
 - 2) $(1 + x)^{1/2}$.
 - 3) $\frac{1}{(1+x)^m}$.
2. Una *carrera de unos* es un bloque no vacío de unos consecutivos delimitado por ceros o por los extremos de la palabra. Por ejemplo, la palabra 00111011 tiene dos carreras de unos. Para $n, r \in \mathbb{N}$, sea $a_{n,r}$ el número de palabras binarias de largo n que tienen exactamente r carreras de unos.
- a) Determine $a_{n,0}$ para $n \geq 0$ y $a_{0,r}$ para $r \geq 1$. ¿Cuál es el menor largo posible de una palabra con $r \geq 1$ carreras de unos?
 - b) Obtenga recurrencias para $a_{n,r}$.
Indicación: le puede ser útil considerar los casos $r = 1$ y $r > 1$.
 - c) Sea $A_r(x) = \sum_{n \geq 0} a_{n,r} x^n$. Encuentre una expresión para $A_r(x)$.
 - d) Use el teorema del binomio generalizado para demostrar que

$$a_{n,r} = \binom{n+1}{2r} \quad \text{para } n, r \geq 0.$$

¿Hay una interpretación combinatorial de esta fórmula?

3. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de números reales. Su *transformada binomial* es la sucesión $(b_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

Mostraremos que podemos recuperar la sucesión original mediante la *fórmula de inversión binomial*:

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

- a) Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, use el teorema del binomio generalizado para demostrar que

$$\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

b) Sean $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Use el inciso anterior para demostrar que

$$B(x) = \frac{1}{1-x} A\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Indicación: Note que $A(U(x)) = \sum_{k \geq 0} a_k U(x)^k$.

c) ¿Qué ocurre en la expresión anterior si reemplazamos x por $\frac{y}{1+y}$?

d) Concluya la fórmula de inversión binomial.