

3.8. Método simbólico

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos, y sea $a_n \in \mathbb{N}$ el número de objetos de $\mathcal{A}$ de peso n . La función generatriz ordinaria de $\mathcal{A}$ es la serie formal

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

3.8.1. Suma

Teorema (Principio aditivo). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos, con FGO $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente. Si construimos un nuevo objeto eligiendo un objeto de $\mathcal{A}$ o un objeto de $\mathcal{B}$ de manera disjunta, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x) + B(x).$$

3.8.2. Producto

Teorema (Principio convolutivo). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases de objetos y $A(x)$ y $B(x)$ sus respectivas FGO. Si construimos un nuevo objeto eligiendo independientemente un objeto de $\mathcal{A}$ y uno de $\mathcal{B}$, y el peso total es la suma de ambos pesos, entonces la FGO de los objetos contruidos es

$$F(x) = A(x)B(x).$$

Aquí el objeto construido es el par ordenado de los dos objetos elegidos.

3.8.3. Listas

Teorema (Principio de las listas). Sea $\mathcal{A}$ una clase de objetos contada por una FGO $A(x)$, con $a_0 = 0$. Consideremos la clase de listas finitas de objetos de $\mathcal{A}$, incluyendo la lista vacía, donde el peso de una lista es la suma de los pesos de sus elementos. Entonces la FGO de esta clase es

$$F(x) = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

3.8.4. Chequeo rápido

1. Una librería vende novelas y revistas. Sean $A(x)$ y $B(x)$ las FGO de las novelas y revistas según su número de páginas, respectivamente. Queremos comprar una novela o una revista. ¿Cuál es la FGO de los libros que podemos elegir según su número de páginas?

a) $\frac{1}{1 - A(x) - B(x)}$. b) $A(x)B(x)$. c) $A(x) + B(x)$.

2. Un sistema identifica cada cuenta mediante un nombre de usuario formado sólo por letras o mediante el símbolo # seguido de su número. Sean $A(x)$ la FGO de los nombres según su largo y $B(x)$ la FGO de los números según su cantidad de dígitos. ¿Cuál es la FGO de los identificadores según su largo total?

a) $A(x) + xB(x)$. b) $A(x) + B(x)$. c) $A(x)B(x)$.

3. Podemos subir una escalera avanzando uno o dos peldaños en cada paso. ¿Cuál es la FGO del número de formas de subir n peldaños?

a) $\frac{1}{1 - x - x^2}$. b) $\frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)}$. c) $(x + x^2)^2$.

4. Consideremos la clase de palabras binarias, incluyendo la palabra vacía, con peso igual al largo de la palabra. El principio de las listas se puede aplicar a esta clase.

a) Falso. b) Verdadero.

5. Sea $\mathcal{A}$ una clase con FGO $A(x)$ tal que se puede aplicar el principio de las listas. ¿Qué contribuye al término constante de $\frac{1}{1 - A(x)}$?

a) Los objetos de $\mathcal{A}$ de peso 0. b) Las listas de largo 1. c) La lista vacía.

3.8.5. Ejercicios

1. a) Lanzamos un dado rojo y uno azul, ambos con caras numeradas del 1 al 6. Sea d_n el número de resultados cuya suma es n . Usando el principio convolutivo, encuentre su FGO $D(x)$.
 b) Un código se forma concatenando una palabra sobre $\{a, b\}$ y una palabra sobre $\{0, 1\}$, en ese orden. Ambas palabras pueden ser vacías. Si c_n es el número de códigos de largo n , encuentre su FGO $C(x)$ usando el principio convolutivo.
 c) Sean $r \geq 1$ y $s \geq 0$ enteros. Si a_n es el número de formas de entregar n peluches idénticos a r niños, de modo que cada uno reciba a lo más s peluches, encuentre su FGO $A(x)$.
 d) Sean $q, r \geq 1$ enteros. Queremos cubrir una franja de n casillas con cuadrados de una casilla y dominós de dos casillas consecutivas, sin superposiciones ni espacios vacíos. Cada cuadrado puede tener uno de q colores y cada dominó uno de r colores. Si t_n es el número de recubrimientos, encuentre su FGO $T(x)$.

2. Encuentre, usando los principios del método simbólico, la FGO de cada una de las siguientes clases.

a) Un chef está preparando un banquete de n platos. Los platos se dividen en cuatro tipos: *entradas*, *sopas*, *sopas* y *postres*. El chef decide imponer las siguientes restricciones:

- puede haber a lo más una entrada,
- debe haber un número par de sopas,
- el número de platos de fondo debe ser múltiplo de 3,
- puede haber a lo más dos postres.

Un menú queda determinado por la cantidad de platos de cada tipo, sin importar el orden. Sea $(m_n)_{n \geq 0}$ el número de menús posibles con n platos. Encuentre la FGO $M(x)$ de $(m_n)_{n \geq 0}$.

b) Tenemos n personas en una fila cuyo orden está fijado. Queremos dividirla en dos grupos consecutivos no vacíos y elegir un representante en cada grupo. Si g_n es el número de formas de hacerlo, encuentre su FGO $G(x)$ usando el principio convolutivo.

c) Sea t_n el número de árboles planos enraizados (APE) con n vértices. Un APE es un árbol finito con raíz en el que cada vértice tiene una lista, posiblemente vacía, de hijos ordenados de izquierda a derecha.

Encuentre la FGO $T(x)$ de $(t_n)_{n \geq 0}$.

d) Sea b_n el número de palabras binarias de largo n sin unos aislados: cada 1 debe tener otro 1 inmediatamente antes o después.

Encuentre la FGO $B(x)$ de $(b_n)_{n \geq 0}$.

3. Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, hay tantas formas de escribir n como suma de enteros positivos distintos como de escribirlo como suma de enteros positivos impares, sin considerar el orden de los sumandos. Estas sumas se llaman *particiones* de n , y sus sumandos se llaman *partes*. Incluimos una única partición de 0: la suma vacía.

a) Enumere las particiones de 6 de ambos tipos.

b) Fije un entero $N \geq 1$. Sean $P_N(x)$ y $Q_N(x)$ las FGO de las particiones con partes distintas y de las particiones con partes impares, respectivamente, restringiendo en ambos casos cada parte a ser a lo más N . Exprese cada FGO como un producto de N o menos factores y explique qué elección registra cada factor.

c) Use $1 + x^j = (1 - x^{2j})/(1 - x^j)$ para demostrar que

$$P_N(x) = Q_N(x) \prod_{j=\lfloor N/2 \rfloor + 1}^N (1 - x^{2j}).$$

Explique por qué el producto de la derecha no altera los coeficientes de grados $0, \dots, N$ de $Q_N(x)$ y concluya la igualdad de los conteos para todo $n \in \mathbb{N}$.