

4.1. Definiciones básicas de grafos

Definición. Un *grafo (simple)* es un par $G = (V, E)$, donde:

- V es un conjunto finito de *vértices* o *nodos*;
- E es un conjunto finito de *aristas*, donde cada arista es un conjunto de dos vértices distintos.

Usualmente escribiremos n para denotar el número de vértices y m para denotar el número de aristas; es decir, $n = |V|$ y $m = |E|$.

Definición. Un *digrafo simple* es un par $G = (V, E)$, donde:

- V es un conjunto finito de *vértices* o *nodos*;
- E es un conjunto finito de *arcos*, donde cada arco es un par ordenado de vértices distintos.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y sean $u, v \in V$. Decimos que u y v son *adyacentes* si $uv \in E$. De manera converso, decimos que uv es una *arista incidente* en u y en v . La *vecindad* de un vértice v es el conjunto

$$N(v) = \{u \in V : uv \in E\}.$$

Definición. Sea $G = (V, E)$ un digrafo simple. Un arco (u, v) tiene *vértice inicial* u y *vértice final* v : sale de u y entra a v , y es incidente en ambos vértices. Decimos que v es un *vecino de salida* de u y que u es un *vecino de entrada* de v . Las *vecindades de salida y de entrada* de un vértice v son, respectivamente,

$$N^+(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}, \quad N^-(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}.$$

Definición. En el contexto de grafos:

- Una *arista paralela* es una copia de una arista que ya existe entre los mismos dos vértices.
- Un *loop* o *bucle* es una arista de un vértice hacia sí mismo.

Los mismos conceptos se aplican a digrafos, donde:

- un *arco paralelo* es una copia de un arco que ya existe entre los mismos dos vértices y con la misma dirección, y
- un *loop* o *bucle* es un arco de un vértice hacia sí mismo.

Tipo	Dirigido	Paralelas	Loops
grafo simple	no	no	no
multigrafo	no	sí	no
grafo	no	sí	sí
digrafo simple	sí	no	no
multidigrafo	sí	sí	no
digrafo	sí	sí	sí

En las columnas de aristas paralelas y loops, “sí” indica que están permitidos, aunque no necesariamente aparezcan. Notemos que en un digrafo simple podemos tener tanto (u, v) como (v, u) : son arcos distintos y no son paralelos (a veces se le llaman *antiparalelos*).

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $v \in V$. El *grado* de v , denotado por $d(v)$, es el número de aristas incidentes en v , contando cada loop dos veces. Si $d(v) = 0$, decimos que v es un *vértice aislado*.

Teorema (Apretón de manos). Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Proposición. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces G tiene un número par de vértices de grado impar.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sea $v \in V$. El *grado de salida* de v , denotado por $d^+(v)$, es el número de arcos que salen de v . El *grado de entrada* de v , denotado por $d^-(v)$, es el número de arcos que entran a v .

Teorema (Apretón de manos en digrafos). Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Entonces

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m.$$

Definición. El *grafo completo* con n vértices, denotado por K_n , es el grafo simple en que todo par de vértices distintos es adyacente.

Definición. Para $n \geq 3$, el *ciclo* con n vértices, denotado por C_n , es el grafo con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y aristas conectadas cíclicamente; es decir, con aristas

$$v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1.$$

Definición. Para $n \geq 1$, el *camino* con n vértices, denotado por P_n , es el grafo con vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y aristas conectando secuencialmente los vértices; es decir, con aristas

$$v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n.$$

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un *subgrafo* de G es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Si $G' \neq G$, decimos que G' es un *subgrafo propio* de G .

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. El *complemento* de G es el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, donde para todo par de vértices distintos $u, v \in V$,

$$uv \in \overline{E} \quad \text{si y sólo si} \quad uv \notin E.$$

Chequeo rápido

- Un digrafo simple puede contener a la vez los arcos (u, v) y (v, u) , con $u \neq v$.
 a) Falso. b) Verdadero.
- En un grafo, las únicas aristas incidentes en v son un loop y una arista vu , con $u \neq v$. ¿Cuál es $d(v)$?
 a) 1. b) 2. c) 3.
- Sea el digrafo simple con $V = \{a, b, c\}$ y $E = \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$. ¿Cuáles son $N^+(a)$ y $d^-(a)$, respectivamente?
 a) $(\{b\}, 2)$. b) $(\{b, c\}, 1)$. c) $(\{b, c\}, 2)$.
- ¿Cuál de estas cantidades puede ser el número de vértices de grado impar de un grafo simple con cinco vértices?
 a) 4. b) 1. c) 3.
- Sea G el camino $a - b - c - d$. ¿Cuál es la vecindad de b en $\overline{G}$?
 a) $\{a, c\}$. b) $\{a, c, d\}$. c) $\{d\}$.

Ejercicios

1.
 - a) Andrés dispuso 8 servidores en un gran anillo con conexiones circulares (1-2-3-4-5-6-7-8-1). Luego, para añadir un tercer canal a cada uno, conectó cada servidor con otro del anillo (el 1 con el 6, el 2 con el 5, el 3 con el 8, y el 4 con el 7).
 Modele la red como un grafo simple: dé V y E , calcule $N(1)$ y determine el grado de cada vértice. ¿Cuántos canales tiene la red? Justifique usando el teorema del apretón de manos.
 - b) Juan tiene una casa de siete habitaciones. Cada puerta une dos habitaciones y no hay puertas al exterior. Después de unos años, Juan decide remodelar la casa. Le gustaría añadir puertas nuevas entre las habitaciones existentes (no se puede agregar puertas al exterior de la casa). ¿Es posible que cada habitación tenga un número impar de puertas?
 - c) Considere C_6 con vértices $1, 2, \dots, 6$ y aristas $12, 23, 34, 45, 56, 61$. Dibuje su complemento. Encuentre en él un subgrafo completo de mayor tamaño y justifique que no puede haber uno mayor.
2. Para $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ consideremos el grafo simple Q_r : sus vértices son los strings binarios de largo r , y dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada. Este grafo se llama *hipercubo de dimensión r* .
 - a) Dibuje Q_2 y Q_3 .
 - b) Para un vértice $x = x_1 \cdots x_r$, determine $N(x)$ y $d(x)$. ¿Cuántos vértices y aristas tiene Q_r ? Justifique el número de aristas usando el teorema del apretón de manos.
 - c) Demuestre que Q_r no contiene un subgrafo completo de tres vértices.
 - d) Demuestre que dos vértices distintos de Q_r tienen cero o dos vecinos comunes. Caracterice cuándo tienen dos.
3. Sea $n \geq 4$ un entero. Definimos el grafo simple H_n cuyos vértices son los subconjuntos de dos elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dos vértices distintos A y B son adyacentes si y sólo si $A \cap B \neq \emptyset$.
 - a) Determine el número de vértices, el grado de cada vértice y el número de aristas de H_n .
 - b) Cuente los subgrafos completos de tres vértices. Justifique que no faltan ni se repiten casos.
 - c) Determine el máximo número de vértices que puede tener un subgrafo completo de H_n . Demuestre su respuesta y describa todos los subgrafos completos que alcanzan ese máximo.