

4.2. Representación, isomorfismo e invariantes

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. La *matriz de adyacencia* de G es la matriz $A = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0 & \text{si } v_i v_j \notin E. \end{cases}$$

Proposición. Sea G un grafo simple y sea A su matriz de adyacencia. Entonces, A es simétrica y su diagonal sólo contiene ceros.

Proposición. Sea G un grafo simple no dirigido con vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y matriz de adyacencia $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Si $i \neq j$, entonces $(A^2)_{ij}$ es el número de vecinos comunes de v_i y v_j .
2. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $(A^2)_{ii} = d(v_i)$.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Una *lista de adyacencia* de G es una representación que, para cada vértice $v \in V$, almacena la lista de vértices adyacentes a v .

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. La *matriz de incidencia* de G es la matriz $B = (b_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times m}$ definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_j \text{ incide en } v_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Proposición. Sea G un grafo simple no dirigido y sea B su matriz de incidencia. Cada columna de B tiene exactamente dos entradas iguales a 1.

Definición. Sean $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ dos grafos simples. Diremos que G y H son *isomorfos* ($G \cong H$) si existe una biyección $f: V \rightarrow V'$ tal que para todo par de vértices $u, v \in V$ tenemos que

$$uv \in E \iff f(u)f(v) \in E'.$$

En ese caso diremos que f es un *isomorfismo* entre G y H .

Definición. Una propiedad de grafos es un *invariante* si asigna el mismo valor a grafos isomorfos.

Proposición. Las siguientes son invariantes:

1. el número de vértices
2. el número de aristas
3. la cantidad de vértices de un mismo grado.

Definición. Una *copia* de un grafo simple F en un grafo simple H es un subgrafo de H isomorfo a F . Dos copias son distintas si difieren en su conjunto de vértices o en su conjunto de aristas. Decir que H contiene k copias de F significará que contiene al menos k copias distintas.

Proposición. Las siguientes son invariantes:

1. contener un K_ℓ como subgrafo ($\ell \geq 1$)
2. contener un P_ℓ como subgrafo ($\ell \geq 1$)
3. contener un C_ℓ como subgrafo ($\ell \geq 3$)
4. contener H como subgrafo para un grafo simple fijo H
5. contener k copias de H , para un grafo simple fijo H y un entero $k \geq 0$.

Chequeo rápido

En las siguientes preguntas, todos los grafos son simples.

1. La suma de todas las entradas de la matriz de adyacencia de un grafo es 14. ¿Cuántas aristas tiene?

a) 7.
b) 14.
c) 28.
2. Sea A la matriz de adyacencia de un grafo con vértices $v_1, \dots, v_n$, donde $n \geq 4$. Si $(A^2)_{24} = 3$, ¿qué podemos afirmar necesariamente?

a) $d(v_2) = 3$.
b) $|N(v_2) \cap N(v_4)| = 3$.
c) $v_2v_4 \in E$.
3. ¿A qué corresponde permutar las columnas de una matriz de incidencia?

a) Cambiar las adyacencias.
b) Cambiar el orden de los vértices.
c) Cambiar el orden de las aristas.
4. Dos grafos con la misma secuencia de grados son necesariamente isomorfos.

a) Falso.
b) Verdadero.

5. ¿Cuántas copias de P_3 hay en K_3 ?

a) 0.

b) 1.

c) 3.

Ejercicios

1. a) Sea G el grafo con vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y aristas $\{12, 13, 23, 24, 45\}$. Escriba su matriz de adyacencia A , en ese orden de vértices, y sus listas de adyacencia. Determine $(A^2)_{14}$ y $(A^2)_{22}$ sin multiplicar matrices.

b) Para $n \geq 3$, determine cuántas copias de P_3 contiene K_n .

c) Un grafo simple tiene vértices v_1, v_2, v_3, v_4 , aristas e_1, e_2, e_3, e_4 y matriz de incidencia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con filas y columnas en los órdenes indicados. Dibuje el grafo y escriba su matriz de adyacencia. Explique cómo recuperar sus grados directamente de M .

d) A partir del ciclo C_6 , con aristas $12, 23, 34, 45, 56, 61$, construimos G_1 agregando la arista 13 y G_2 agregando la arista 14 . ¿Son isomorfos? Justifique mediante un isomorfismo explícito o un invariante que los distinga.

e) Construya dos grafos simples no isomorfos cuya secuencia de grados sea $(3, 2, 2, 2, 1)$. Justifique que sus ejemplos no son isomorfos.

f) Sean G y H grafos simples. Demuestre que $G \cong H$ si y sólo si $\overline{G} \cong \overline{H}$.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con n vértices y m aristas. Construimos un grafo $D(G)$ con conjunto de vértices $V \times \{0, 1\}$: los vértices (u, i) y (v, j) son adyacentes si y sólo si $uv \in E$ e $i \neq j$. Es decir, hacemos dos copias del conjunto de vértices y usamos las aristas de G para conectar una copia con la otra.

a) Dibuje $D(P_3)$.

b) Determine el número de vértices y aristas de $D(G)$, y el grado de (v, i) en términos del grado de v en G .

c) Sea A la matriz de adyacencia de G en el orden $v_1, \dots, v_n$. Escriba la matriz de adyacencia B de $D(G)$ en el orden

$$(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (v_1, 1), \dots, (v_n, 1).$$

Calcule B^2 en términos de A^2 e interprete sus bloques mediante vecinos comunes.

d) Demuestre que $D(G)$ no contiene ninguna copia de C_3 , independiente del grafo G .

e) Demuestre que $D(K_4)$ es isomorfo a Q_3 , el grafo cuyos vértices son los strings binarios de largo 3, adyacentes cuando difieren en exactamente una coordenada.

3. Sea G un grafo simple con $n \geq 1$ vértices, m aristas y matriz de adyacencia A . Denotamos por $c_4(G)$ el número de copias de C_4 en G .

a) Demuestre que

$$c_4(G) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \binom{(A^2)_{ij}}{2}.$$

Indicación: cuente via los dos vértices opuestos del ciclo y sus dos vecinos comunes. ¿Sobrecontó?

b) Suponga que G no contiene ninguna copia de C_4 . Demuestre que

$$\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

Indicación: cuente de dos maneras las formas de elegir un vértice y un conjunto de dos de sus vecinos.

c) Bajo la misma hipótesis, demuestre que

$$m \leq \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n - 3}).$$

Indicación: expanda la desigualdad $\sum_{v \in V(G)} \left(d(v) - \frac{2m}{n}\right)^2 \geq 0$.

d) Concluya que todo grafo simple con siete vértices y once aristas contiene una copia de C_4 .