

4.3. Conectividad y árboles

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un *uv-camino* (o simplemente *camino*) de largo k es una secuencia de vértices $v_0, v_1, \dots, v_k$ tal que (1) $v_0 = u$, (2) $v_k = v$, y (3) $v_{i-1}v_i \in E$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Diremos además que:

- El camino es *simple* si todos sus vértices son distintos.
- Es *cerrado* si $v_0 = v_k$.

Lema. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $u, v \in V$. Si existe *uv-camino*, entonces existe un *uv-camino simple*.

Definición. Un grafo $G = (V, E)$ es *conexo* si

- $n \geq 1$ y
- para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ existe un camino (simple) desde u hasta v .

Definición. Sea G un grafo no dirigido. Una *componente conexa* de G es un subgrafo H de G tal que:

- H es conexo,
- H no es subgrafo propio de ningún subgrafo conexo de G .

Es decir, una componente conexa es un subgrafo conexo maximal.

Teorema. Todo grafo es la unión disjunta de sus componentes conexas.

Proposición. Un grafo G es conexo si y sólo si tiene exactamente una componente conexa.

Proposición. Si dos grafos simples son isomorfos, entonces tienen la misma cantidad de componentes conexas. En particular, ser conexo es un invariante.

Definición. En un grafo simple, un *ciclo* es un camino cerrado de largo $k \geq 3$ en el que $v_0, \dots, v_{k-1}$ son distintos. Un grafo es *acíclico* si no contiene ciclos.

Definición. Un grafo simple T se llama *árbol* si es conexo y acíclico, es decir, si no contiene ciclos. Un grafo simple no dirigido F se llama *bosque* si es acíclico.

Lema. Sea T un árbol. Entonces entre cada par de vértices distintos de T existe un único camino simple.

Lema. Sea T un árbol con al menos dos vértices. Entonces T tiene al menos dos hojas.

Definición. Sea T un árbol. Una *hoja* de T es un vértice de grado 1.

Proposición. Si $T = (V, E)$ es un árbol con $|V| = n$, entonces $|E| = n - 1$.

Teorema. Sea $T = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n \geq 1$ y $|E| = m$. Las siguientes propiedades son equivalentes.

1. T es un árbol.
2. T es conexo y $m = n - 1$.
3. T es conexo minimal: es conexo, y al borrar cualquier arista deja de ser conexo.
4. T es acíclico y $m = n - 1$.
5. T es acíclico maximal: es acíclico, y al agregar cualquier arista entre dos vértices no adyacentes aparece un ciclo.
6. Entre cada par de vértices distintos de T existe un único camino simple.

Definición. Un *árbol enraizado* es un árbol T junto con un vértice r , llamado *raíz*.

Definición. Sea T un árbol con raíz r .

- Si $v \neq r$, el *padre* de v es el vértice anterior a v en el único camino simple desde r hasta v .
- Si u es el padre de v , decimos que v es un *hijo* de u .
- Dos vértices distintos son *hermanos* si tienen el mismo padre.
- Los *ancestros* de v son los vértices que aparecen en el único camino simple desde r hasta v .
- Los *descendientes* de v son los vértices que tienen a v como ancestro.
- Una *hoja* es un vértice sin hijos.
- Un *vértice interno* es un vértice con al menos un hijo.

Definición. Sea T un árbol enraizado. La *altura* de T es el largo máximo de un camino simple desde la raíz hasta una hoja. La *aridad* de T es el máximo número de hijos que tiene un vértice de T .

Definición. Sea $k \geq 1$.

- Un árbol enraizado es *k-ario* si cada vértice interno tiene a lo más k hijos.
- Un árbol enraizado es *k-ario completo* si cada vértice interno tiene exactamente k hijos.

Proposición. Sea T un árbol k -ario de altura h . Entonces T tiene a lo más k^h hojas.

Proposición. Sea T un árbol k -ario completo con i vértices internos. Entonces

- El número total de vértices de T es $ki + 1$.
- El número de hojas de T es $(k - 1)i + 1$.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Un *uv-dicamino* (o simplemente *dicamino*) de largo k , con $k \geq 0$, es una secuencia de vértices $v_0, v_1, \dots, v_k$ tal que (1) $v_0 = u$, (2) $v_k = v$, y (3) $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Diremos además que:

- El dicamino es *simple* si todos sus vértices son distintos.
- Es *cerrado* si $v_0 = v_k$.

Lema. Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sean $u, v \in V$. Si existe un uv -dicamino, entonces existe un uv -dicamino simple.

Definición. Un digrafo $G = (V, E)$ es *fuertemente conexo* si

- $n \geq 1$ y
- para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ existe un dicamino desde u hasta v y existe un dicamino desde v hasta u .

Definición. Sea $G = (V, E)$ un digrafo. El *grafo no dirigido subyacente* de G es el grafo no dirigido G^{und} con el mismo conjunto de vértices, donde u y v son adyacentes si y sólo si $(u, v) \in E$ o $(v, u) \in E$.

Definición. Un digrafo G es *débilmente conexo* si su grafo no dirigido subyacente G^{und} es conexo.

Proposición. Todo digrafo fuertemente conexo es débilmente conexo.

Definición. Sea G un digrafo. Una *componente fuertemente conexa* de G es un subgrafo H de G tal que:

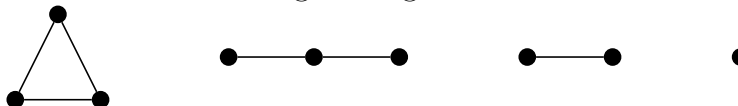
- H es fuertemente conexo;
- H no es subgrafo propio de otro subgrafo fuertemente conexo de G .

Es decir, una componente fuertemente conexa es un subgrafo fuertemente conexo maximal.

Teorema. Los conjuntos de vértices de las componentes fuertemente conexas de un digrafo G forman una partición de $V(G)$.

Chequeo rápido

1. ¿Cuántas componentes conexas tiene el siguiente grafo?



a) 3.

b) 4.

c) 5.

2. Todo grafo simple con $n \geq 1$ vértices y $n - 1$ aristas es un árbol.

a) Verdadero.

b) Falso.

3. En un árbol enraizado con al menos dos vértices, la raíz tiene grado 1. ¿Qué podemos afirmar sobre ella en el árbol enraizado?

a) Es una hoja.

c) No es hoja ni vértice interno.

b) Es un vértice interno.

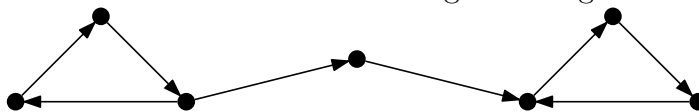
4. Un árbol 2-ario completo tiene siete vértices internos. ¿Cuántas hojas tiene?

a) 7.

b) 14.

c) 8.

5. ¿Cuántas componentes fuertemente conexas tiene el siguiente digrafo?



a) 1.

b) 2.

c) 3.

Ejercicios

1.
 - a) Sea G un grafo simple con al menos un vértice, en el que todos los vértices tienen grado al menos 2. Demuestre que G contiene un ciclo.
 - b) Sea T un árbol y sea v uno de sus vértices. Demuestre que, al borrar v y todas sus aristas incidentes, quedan exactamente $d(v)$ componentes conexas.
 - c) Sea F un bosque con n vértices, m aristas y c componentes conexas. Demuestre que $m = n - c$.
 - d) Sea T un árbol k -ario de altura h . Demuestre que T tiene a lo más

$$1 + k + k^2 + \cdots + k^h = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$$

vértices.

- e) Sean H_1 y H_2 subgrafos fuertemente conexos de un digrafo G . Suponga que tienen al menos un vértice en común. Demuestre que su unión, formada por todos los vértices y arcos de H_1 y H_2 , es fuertemente conexa.
2. Para $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ consideremos el digrafo B_r : sus vértices son los strings binarios de largo r , y para cada vértice $x_1x_2 \cdots x_r \in \{0, 1\}^r$ y cada $b \in \{0, 1\}$ hay una arista dirigida

$$x_1x_2 \cdots x_r \longrightarrow x_2x_3 \cdots x_rb.$$

- a) Dibuje B_2 . Determine cuántos vértices, arcos y loops tiene B_r , y los grados de entrada y salida de cada vértice.
- b) Demuestre que desde cualquier vértice de B_r podemos llegar a cualquier otro mediante un dicamino de largo a lo más r . Determine sus componentes fuertemente conexas y decida si B_r es débilmente conexo.
- c) Denotemos por 0^r el string formado por r ceros. A partir de B_r , conservamos sólo los arcos de la forma

$$x_1x_2 \cdots x_r \longrightarrow x_2x_3 \cdots x_r0,$$

eliminamos el loop en 0^r y olvidamos las direcciones. Llamemos T_r al grafo simple no dirigido que resulta. Dibuje T_2 y demuestre que T_r es un árbol para todo $r \geq 2$.

- d) Sea ahora T_r visto como árbol enraizado en 0^r . Describa el padre de cada vértice distinto de la raíz y determine cuáles son las hojas y cuántas hay. Determine la altura y la aridad de este árbol enraizado. ¿Es un árbol 2-ario completo? Justifique.