4.6. Coloreos

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y sea $k \in \mathbb{N}$. Un *coloreo válido* de G es una asignación de colores a sus vértices tal que, si $uv \in E$, entonces u y v reciben colores distintos. Decimos que G es *k-coloreable* si tiene un coloreo válido usando a lo más k colores.

Definición. Sea G un grafo simple. El *número cromático* de G, denotado $\chi(G)$, es el menor número de colores necesarios para colorear válidamente G.

Algoritmo 1 Coloreo avaro

Entrada: un grafo simple $G = (V, E)$ y un orden $v_1, \ldots, v_n$ de sus vértices.
Salida: un coloreo válido c de G.
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
    $F \leftarrow \{c(v_j) : j < i \text{ y } v_j v_i \in E\}$.
    $c(v_i) \leftarrow \min(\mathbb{N} \setminus F)$.
return c.

Teorema. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no vacío, con grado máximo

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v).$$

El algoritmo de coloreo avaro obtiene un coloreo válido usando a lo más $\Delta(G) + 1$ colores. En particular,

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un conjunto $I \subseteq V$ es *independiente* si no hay una arista de G entre dos vértices de I.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $k \in \mathbb{N}$. Diremos que G es *k-partito* si existen conjuntos independientes $V_1, \ldots, V_k$ de G llamados *partes* tales que:

1. $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, y
2. $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

La familia $(V_1, \ldots, V_k)$ se llama una *k-partición* de G.

Proposición. Sea G un grafo simple y sea $k \in \mathbb{N}$. G es k-coloreable si y sólo si es k-partito.

Definición. Sean $\ell, r \in \mathbb{N}$. El *grafo bipartito completo* $K_{\ell,r}$ tiene partes L y R, con $|L| = \ell$ y $|R| = r$, y cada vértice de L es adyacente a cada vértice de R.

Teorema. Sea G un grafo simple. G es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de largo impar.

Definición. Sea G un grafo simple. G es *planar* si se puede dibujar en el plano de modo que sus aristas no se crucen, salvo en vértices comunes. A un dibujo con esta propiedad lo llamamos una *representación planar* de G.

Definición. Sea G un grafo conexo con una representación planar fija. El dibujo divide el plano en *regiones*, también llamadas caras. La región no acotada, que queda "afuera" del dibujo, también cuenta como región.

Definición. Sea G un grafo conexo con una representación planar fija. El *largo de frontera* de una región R, denotado $\ell(R)$, es la cantidad de aristas que aparecen al recorrer su frontera, contadas con multiplicidad. Si una arista tiene la misma región a ambos lados, se cuenta dos veces.

Lema (Apretón de manos para regiones)**.** Sea $G=(V,E)$ un grafo simple, conexo y planar con una representación planar fija. Entonces, $\sum_R \ell(R) = 2|E|$.

Teorema (Fórmula de Euler)**.** Sea $G=(V,E)$ un grafo simple no vacío, conexo y planar. Si r es el número de regiones de una representación planar de G, entonces

$$|V| - |E| + r = 2.$$

Corolario. Sea G un grafo simple, conexo y planar con $n \geq 3$ vértices y m aristas.

$$m \leq 3n - 6.$$

Lema. Sea G un grafo simple planar no vacío. G tiene un vértice de grado a lo más 5.

Teorema (Teorema de los seis colores)**.** Sea G un grafo simple planar.

$$\chi(G) \leq 6.$$

Teorema (Teorema de los cuatro colores)**.** Sea G un grafo simple planar.

$$\chi(G) \leq 4.$$

Ejercicios

1. *a*) Sea G un grafo simple con al menos un vértice y componentes conexas $G_1, \ldots, G_t$. Demuestre que $\chi(G) = \text{máx}_{1 \leq i \leq t} \chi(G_i)$.

b) Sea T un árbol con al menos dos vértices. Demuestre que $\chi(T) = 2$ y que su bipartición es única salvo intercambiar las partes. ¿Hay grafos bipartitos con más de una bipartición distinta?

c) Muestre que siempre existe un orden donde el algoritmo de coloreo avaro usa a lo más $\chi(G)$ colores. Muestre también un orden donde el algoritmo de coloreo avaro usa más de $\chi(G)$ colores.

d) Un grafo simple, conexo y planar tiene $n \geq 3$ vértices y cada región de una representación planar tiene frontera de largo 3. Determine su número de aristas y de regiones en función de n.

e) Demuestre que un grafo simple planar con $n \geq 1$ vértices tiene un conjunto independiente de tamaño al menos $\lceil n/6 \rceil$.

f) Use BFS para diseñar un algoritmo que decida si un grafo simple $G = (V, E)$ es bipartito.

2. Estudiaremos qué restricciones adicionales impone la planaridad a los grafos bipartitos. Sea G un grafo simple, conexo, planar y bipartito con $n \geq 3$ vértices y m aristas.

a) Explique por qué toda región tiene frontera de largo al menos 4.

b) Muestre que $m \leq 2n - 4$.

c) Muestre que G tiene un vértice de grado a lo más 3.

d) Determine $\chi(K_{\ell,r})$ para $\ell, r \geq 1$.

e) Determine para qué valores $\ell, r \geq 1$ el grafo $K_{\ell,r}$ es planar.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no vacío, con $n = |V|$. El *número de independencia* de G es

$$\alpha(G) = \text{máx}\{|I| : I \subseteq V \text{ es independiente}\}.$$

a) Demuestre que

$$n \leq \alpha(G)\chi(G) \qquad \text{y} \qquad \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

b) Un conjunto de vértices es un *clique* si todos sus pares de vértices distintos son adyacentes. Demuestre que $\alpha(G) \leq \chi(\overline{G})$ y deduzca que

$$\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n.$$

c) Demuestre que

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$