4.7. Recorridos en grafos

Definición. Sea $G = (V, E)$ un multigrafo. Un *camino euleriano* de G es un recorrido que usa cada arista de G exactamente una vez.
Un *circuito euleriano* de G es un camino euleriano que empieza y termina en el mismo vértice.

Lema. Sea $G = (V, E)$ un multigrafo finito no vacío. Si $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo.

Teorema (Caracterización de Euler)**.** Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo. G tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Algoritmo 1 Construcción de un circuito euleriano

1: **Entrada:** un multigrafo conexo $G = (V, E)$ con todos sus grados pares.
2: **Salida:** un circuito euleriano de G.
3: **if** $E = \varnothing$ **then**
4: **return** el único vértice de G.
5: **end if**
6: Encontrar un ciclo, borrarlo.
7: Recursivamente, resolver en las componentes conexas que contienen aristas.
8: Insertar la solución en el ciclo original.
9: **return** el circuito obtenido.

Teorema (Caminos eulerianos)**.** Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo. G tiene un camino euleriano (que no es circuito) si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Lema. Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo finito no vacío. Si $d^+(v) \geq 1$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un diciclo.

Teorema (Circuitos eulerianos dirigidos)**.** Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo no vacío sin vértices aislados. G tiene un circuito euleriano si y sólo si

1. G es débilmente conexo, y
2. para todo vértice v se cumple $d^-(v) = d^+(v)$.

Algoritmo 2 Construcción de un circuito euleriano dirigido

1: **Entrada:** un multidigrafo débilmente conexo $G = (V, E)$, sin vértices aislados, con $d^-(v) = d^+(v)$ para todo $v \in V$.
2: **Salida:** un circuito euleriano dirigido de G.
3: Encontrar un ciclo, borrarlo.
4: Recursivamente, resolver en las componentes débilmente conexas que contienen aristas.
5: Insertar la solución en el ciclo original.
6: **return** el circuito obtenido.

Teorema (Caminos eulerianos dirigidos)**.** Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo sin vértices aislados. G tiene un camino euleriano dirigido (que no es circuito) si y sólo si

1. G es débilmente conexo,
2. Existen dos vértices s, t tales que $d^+(s) = d^-(s) + 1$ y $d^-(t) = d^+(t) + 1$, y
3. para todo vértice $v \neq s, t$ se cumple $d^-(v) = d^+(v)$.

Definición. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un *camino Hamiltoniano* de G es un camino que usa cada vértice de G exactamente una vez.
Un *ciclo Hamiltoniano* de G es un ciclo que usa cada vértice de G exactamente una vez.

Teorema (Dirac)**.** Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $n \geq 3$ vértices. Si $d(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo Hamiltoniano.

Proposición. Si $G = (V, E)$ tiene un ciclo Hamiltoniano, entonces todo vértice de G tiene grado al menos 2.

Proposición. Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito con bipartición (L, R). Si $|L| \neq |R|$, entonces G no tiene ciclo Hamiltoniano.

Ejercicios

1. *a*) Demuestre que, si $G = (V, E)$ es un grafo conexo y existe una arista $e \in E$ tal que $G' = (V, E \backslash \{e\})$ no es conexo entonces G tiene vértices de grado impar.
   b) Demuestre que, si G es un grafo bipartito con un número impar de vértices, entonces G no tiene un circuito hamiltoniano.
   c) Un grafo de torneo es un grafo dirigido con $n \geq 1$ nodos donde hay exactamente una arista entre cada par de nodos distintos y no hay auto-loops (aristas que conectan un nodo consigo mismo). Demuestre que si un grafo de torneo contiene un ciclo, entonces contiene un ciclo de longitud 3, es decir, un ciclo que contiene 3 aristas.

2. En varias aplicaciones estamos interesados en recorrer todas las configuraciones binarias de un

sistema cambiando un solo bit a la vez. Por ejemplo, esto aparece en pruebas de circuitos digitales, exploración de estados de un programa o la codificación de señales analógicas de manera digital.

Una forma común de hacer lo anterior es mediante un *código de Gray*. Un *código de Gray* de orden n es una lista circular de todos los strings binarios de largo n, donde cada string aparece exactamente una vez, y dos strings consecutivos difieren en exactamente una coordenada (incluyendo el primero con el último). Por ejemplo, la siguiente lista

$$000, 001, 101, 100, 110, 111, 011, 010.$$

es un código de Gray de orden 3.

a) Para $r \in \mathbb{N}$ consideremos el grafo Q_r: sus vértices son los strings binarios de largo r, y dos vértices son adyacentes si difieren en exactamente una coordenada. Dibuje Q_2 y dé un código de Gray de orden 2. ¿Qué relación tienen los códigos de Gray de orden n con Q_n? Argumente.

b) Muestre que para todo $n \geq 1$ el grafo Q_n es conexo. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ tiene un circuito euleriano?

c) Muestre que para todo $n \geq 2$ el grafo Q_n tiene un ciclo hamiltoniano. Use esto para concluir que para todo $n \geq 2$ existe un código de Gray de orden n.
Indicación: le puede ser útil argumentar por inducción sobre n.

d) Para un conjunto $\mathcal{U}$ consideremos el grafo simple $G(\mathcal{U})$: sus vértices son los subconjuntos de $\mathcal{U}$, y para cada par de vértices $A, B \subseteq \mathcal{U}$ estos están conectados por una arista si $A \subseteq B$ y $|B| = |A| + 1$.
Dibuje $G(\{1, 2\})$ y compare con Q_2. Muestre que para todo $n \geq 1$ los grafos $G(\{1, \ldots, n\})$ y Q_n son isomorfos. ¿Qué consecuencia obtiene de esto y la parte *c*)?
Indicación: no olvide argumentar que su propuesta es efectivamente un isomorfismo.

3. En muchas situaciones queremos recorrer todos los patrones binarios de cierta longitud de la forma más compacta posible. Por ejemplo, esto aparece en pruebas exhaustivas de sistemas digitales, problemas de generación combinatorial y en ciertos problemas de codificación.

   Una forma eficiente de hacer lo anterior es mediante una *secuencia de de Bruijn*. Una *secuencia de de Bruijn* de orden n es un string circular de largo 2^n en el que cada string binario de largo n aparece *exactamente* una vez como bloque consecutivo circular. Por ejemplo

   $$00010111$$

   es una secuencia de de Bruijn de orden 3, pues sus bloques consecutivos circulares son

   $$000,\ 001,\ 010,\ 101,\ 011,\ 111,\ 110,\ 100.$$

   a) Para $r \in \mathbb{N},\ r \geq 1$ consideremos el digrafo B_r: sus vértices son los strings binarios de largo r, y para cada vértice $x_1x_2 \cdots x_r \in \{0, 1\}^r$ y cada $b \in \{0, 1\}$ hay una arista dirigida

   $$x_1x_2 \cdots x_r \longrightarrow x_2x_3 \cdots x_rb.$$

   Dibuje B_2 y dé una secuencia de de Bruijn de orden 2. ¿Qué relación tienen las secuencias de de Bruijn de orden n con B_n? Argumente.

b) Demuestre que para todo $n \geq 1$ el digrafo B_n tiene un circuito Euleriano.

c) Dado un digrafo D su *digrafo de líneas* $L(D)$ se define de la siguiente manera: los vértices de $L(D)$ son las aristas de D, y hay una arista dirigida de e a f en $L(D)$ si el vértice donde termina e es el vértice donde comienza f.
Dibuje $L(B_1)$ y compare con B_2 de la parte *a*). Muestre que para todo $n \geq 1$ los grafos $L(B_n)$ y B_{n+1} son isomorfos.
Indicación: no olvide argumentar que su propuesta es efectivamente un isomorfismo.

d) Sea D un digrafo con al menos una arista. Muestre que si D tiene un circuito Euleriano, entonces $L(D)$ tiene un ciclo Hamiltoniano. Use eso para concluir que existen secuencias de de Bruijn de orden n para todo $n \geq 2$.