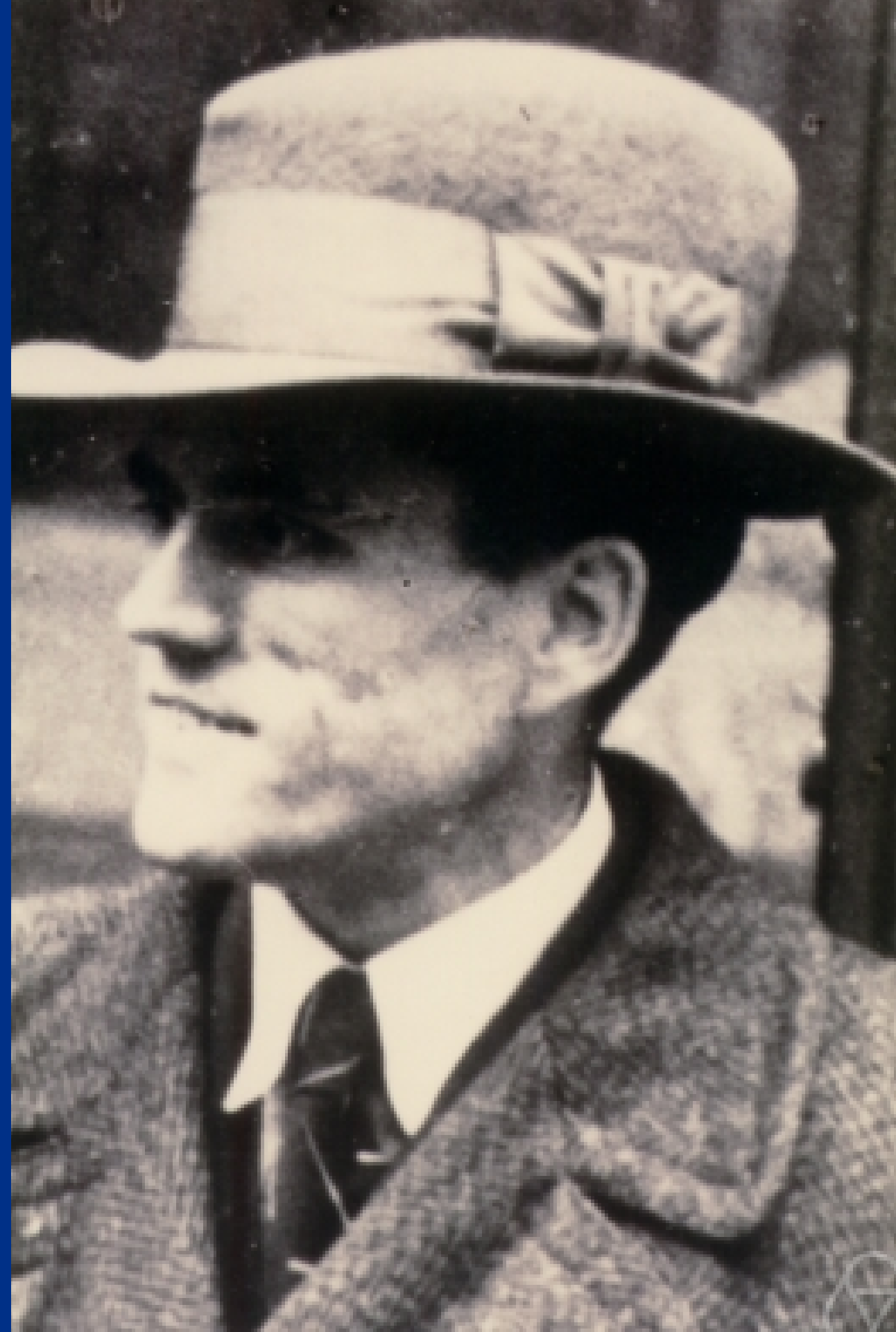


Deducción natural



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Propositiones
- Operadores lógicos
- Sintaxis y semántica
- Razonamiento válido

- **Plan:**

- Deducción natural

Deducción natural

Consecuencia lógica

- ¿Argumento válido?

Def.

Sean $P_1, \dots, P_k$ FBF y sea C otra FBF.

Diremos que C es una *consecuencia lógica* de $P_1, P_2, \dots, P_k$ si el argumento con esas premisas y con conclusión C es válido.

Usaremos la notación $\{P_1, P_2, \dots, P_k\} \models C$ para denotar que C es una consecuencia lógica de $P_1, P_2, \dots, P_k$.

- **Equivalentes:**

$$\{P_1, \dots, P_k\} \models C \quad (P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \rightarrow C \text{ es una tautología} \quad \begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_k \\ \hline C \end{array}$$

- **Ej:**

- *Modus ponens:* $\{p, p \rightarrow q\} \models q$.

Deducción natural

- ¿Cómo probar formalmente algo?
 - Eficiente
 - Natural
- *Deducción natural*
 - Mantener una lista de fórmulas demostradas
 - Partir con las premisas en la lista
 - Usar reglas de inferencia para agregar nuevas fórmulas demostradas
 - Terminar cuando la conclusión aparezca en nuestra lista
 - **Subdemostraciones**
- **Nosotros:** estilo Fitch
- **Notación:** $\Gamma \vdash \alpha$ si α se deduce de Γ por deducción natural.
- Reglas de inferencia para los operadores lógicos.

Inferencia: conjunción y doble negación

Inf.

$\wedge$ -intro: Si hemos demostrado α y β , podemos concluir $\alpha \wedge \beta$.

$\wedge$ -elim: De $\alpha \wedge \beta$ podemos concluir α y también β .

$\neg\neg$ -intro: Si hemos demostrado α , podemos concluir $\neg\neg\alpha$.

$\neg\neg$ -elim: Si hemos demostrado $\neg\neg\alpha$, podemos concluir α .

● Gráficamente:

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

● Ej:

El perro ladra.

El gato maúlla.

Es falso que el gato no maúlle y es falso que el perro no ladre.

Inferencia: implicancia y descarga de supuestos

Inf.

- $\rightarrow$ -elim: Si hemos demostrado $\alpha \rightarrow \beta$ y α , podemos concluir β .
- $\rightarrow$ -intro: Si, al asumir temporalmente α , logramos demostrar β , podemos concluir $\alpha \rightarrow \beta$ y descargar el supuesto α .

- Gráficamente:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta} \quad \begin{array}{l} \text{(supuesto temporal)} \\ \text{(conclusión temporal)} \end{array}$$

- Subdemostraciones: introducción y descarga de supuestos.
- **Ej:** transitividad de la implicancia.
 - $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.

Inferencia: disyunción

Inf.

$\vee$ -intro: Si hemos demostrado una de α, β , podemos concluir $\alpha \vee \beta$.

$\vee$ -elim: Si hemos demostrado $\alpha \vee \beta$ y obtenemos γ en una subdemostración que supone temporalmente α y en otra que supone temporalmente β , podemos concluir γ y descargar ambos supuestos.

• Gráficamente:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

$\alpha \vee \beta$

α (supuesto temporal)

$\vdots$

γ (conclusión temporal)

β (supuesto temporal)

$\vdots$

γ (conclusión temporal)

γ

• **Ej:** $\{p \wedge (q \vee r)\} \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Inferencia: contradicción

- **Notación:** $\perp$ para representar una contradicción.

Inf.

$\perp$ -intro: Si hemos demostrado α y $\neg\alpha$, podemos concluir $\perp$.

$\perp$ -elim: Si hemos demostrado $\perp$, podemos concluir α .

Absurdo: Si al suponer temporalmente α concluimos $\perp$, podemos concluir $\neg\alpha$.

- **Gráficamente:**

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\perp}$$

$$\frac{\perp}{\alpha}$$

α	(supuesto temporal)
$\vdots$	
$\perp$	(conclusión temporal)
$\neg\alpha$	

- **Ej:** $\{\alpha \vee \beta, \neg\alpha\} \vdash \beta$.
- **Clave:** sólo reglas de inferencia agregan supuestos/resultados.

Completitud y correctitud

- ¿Cómo se relaciona $\vdash$ con $\models$?
- La deducción natural sólo demuestra consecuencias lógicas.
 - La corrección de las reglas se verifica mediante tablas de verdad
 - Inducción

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \vdash \phi$, entonces $\Gamma \models \phi$.

- ¿Puede la deducción natural demostrar todas las consecuencias lógicas?

Teo.

Sea Γ un conjunto de FBF y sea ϕ una FBF.

Si $\Gamma \models \phi$, entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Dudas/Preguntas

Problema del día

Sea Γ un conjunto de fórmulas bien formadas. Diremos que Γ es *(sintácticamente) inconsistente* si $\Gamma \vdash \perp$, y *(sintácticamente) consistente* en caso contrario.

a) Considere el conjunto

$$\Gamma_0 = \{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg r \wedge \neg s\}.$$

Muestre que Γ_0 es inconsistente.

- b) Demuestre que Γ es inconsistente si y sólo si $\Gamma \vdash \phi$ para toda fórmula ϕ .
- c) Sea ϕ una fórmula bien formada. Demuestre que $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente si y sólo si $\Gamma \vdash \neg\phi$.
- d) Si Γ es consistente, demuestre que al menos uno de los conjuntos $\Gamma \cup \{\phi\}$ y $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente. ¿Debe ser exactamente uno? Justifique su respuesta.

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Deducción natural

- **Próx. clase:**

- Equivalencias
- Expresividad
- Satisfacibilidad