

Equivalencia,
expresividad y
satisfacibilidad



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Deducción natural
- **Plan:**
 - Equivalencia
 - Expresividad
 - Satisfacibilidad

Equivalencias

Equivalencia lógica

- Equivalencia $\rightarrow$ mismo contenido semántico.

Def.

Sean α y β dos FBF.

Diremos que α y β son *equivalentes* si para toda valuación v de sus variables se cumple $\hat{v}(\alpha) = \hat{v}(\beta)$.

Denotaremos esto como $\alpha \equiv \beta$.

- **Lo mismo:**

- $\alpha \equiv \beta$.
- $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.

- **Ej:**

- Equivalencias de introducción al álgebra.

Equivalencias

- **Notación:** $\top$ es la constante verdadera y $\perp$, la constante falsa.

Prop.

Sean α, β y γ tres FBF.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| ◦ $\alpha \wedge \top \equiv \alpha$ | (Identidad del $\wedge$) |
| ◦ $\alpha \vee \perp \equiv \alpha$ | (Identidad del $\vee$) |
| ◦ $\alpha \wedge \perp \equiv \perp$ | (Anulación del $\wedge$) |
| ◦ $\alpha \vee \top \equiv \top$ | (Anulación del $\vee$) |
| ◦ $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ | (Conmutatividad del $\wedge$) |
| ◦ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ | (Conmutatividad del $\vee$) |
| ◦ $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ | (Asociatividad del $\wedge$) |
| ◦ $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ | (Asociatividad del $\vee$) |
| ◦ $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ | (Doble negación) |
| ◦ $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$ | (Dist. del $\wedge$ sobre $\vee$) |
| ◦ $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$ | (Dist. del $\vee$ sobre $\wedge$) |
| ◦ $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ | (De Morgan) |
| ◦ $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ | (De Morgan) |
| ◦ $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ | (Caracterización de $\rightarrow$) |

Consecuencias para la inferencia

- **Cada equivalencia** $\alpha \equiv \beta$ da dos consecuencias semánticas:
 - $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.
- **Ej:** $\{\neg(p \wedge q), p\} \models \neg q$.

Expresividad

Funciones booleanas

- **Función booleana:** $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.
- Una función booleana puede representarse mediante una tabla de verdad.
- **Toda** FBF representa una función booleana.
 - $f(p, q) = p \wedge q$.
 - $f(p, q, r) = (p \wedge q) \vee r$.
- ¿Puede toda función booleana representarse mediante una FBF?

p	q	r	$f(p, q, r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Expresividad

- FBF **estructurada**: disjunción de conjunciones.

Def.

Una fórmula proposicional está en *forma normal disyuntiva* si es una disyunción de conjunciones de variables proposicionales o sus negaciones.

- Podemos generalizar la construcción anterior

Teo.

Sea $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ una función booleana.

Existe una fórmula proposicional en forma normal disyuntiva que representa a f .

- **Dem:**

Completitud funcional

- Consecuencias interesantes.

Def.

Un conjunto de operadores es *funcionalmente completo* si permite representar cualquier función booleana.

Cor.

El conjunto de operadores $\{\vee, \wedge, \neg\}$ es funcionalmente completo.

- Mostrar completitud funcional $\leftarrow$ simular un conjunto func. completo.
- **Ej:** $\{\wedge, \neg\}$ es funcionalmente completo.

Satisfacibilidad

Satisfacibilidad

- Propiedades más importantes de la lógica proposicional

Def.

Sea α una FBF.

Diremos que α es *satisfacible* si existe una valuación v de sus variables tal que $\hat{v}(\alpha) = 1$.

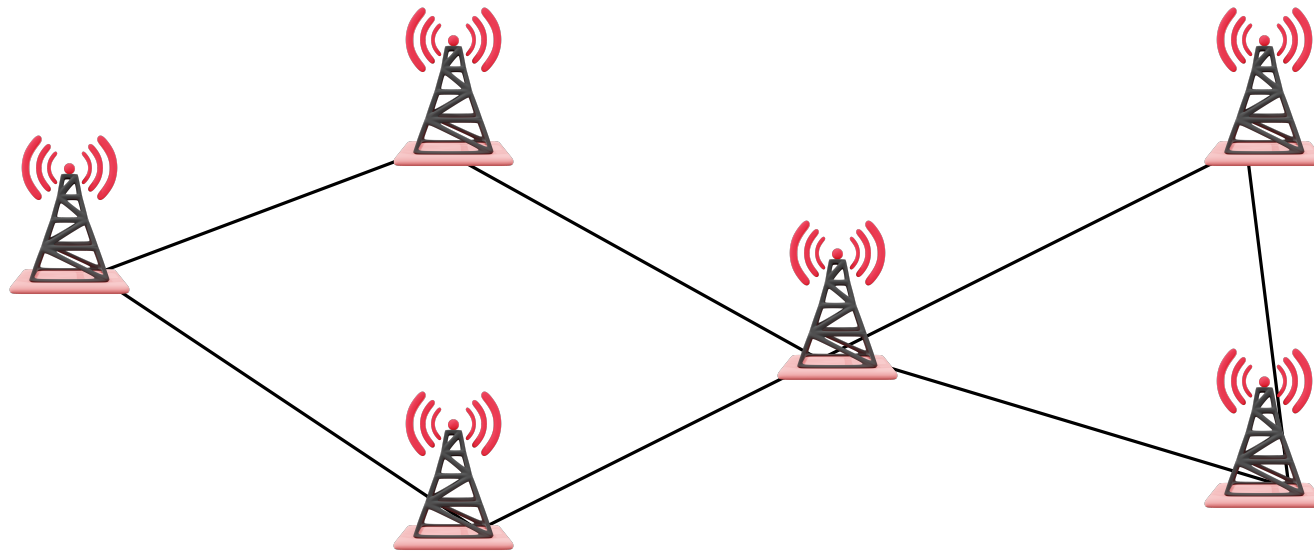
- **Equiv:** α no es contradicción.
- **Ej:**
 - $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$.
 - $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$.
- **Fundamental** para la computación (CC3102).
- Solucionadores de SAT.
- Modelar como SAT $\rightarrow$ usar un solucionador de SAT.

Agendamiento

- Programar exámenes.
- Tres ramos: lógica, computación y matemáticas.
- Restricciones:
 - Cada examen debe ser programado en la mañana o en la tarde.
 - Los exámenes de lógica y computación no van juntos.
 - El examen de matemáticas va antes que el de computación.
- ¿Variables?
- ¿Restricciones?

Torres e interferencia

- Cada torre transmite en una de tres frecuencias (b/m/a).
- Las torres cercanas que usan la misma frecuencia interfieren entre sí.



- **Input:** n torres y pares de torres cercanas $C \subseteq \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$.
- **Output:** ¿Se puede transmitir sin interferencia? ¿Cómo?
- ¿Variables?
- ¿Restricciones?

Solver para Sudoku

- **Input:** pistas de un tablero de Sudoku.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

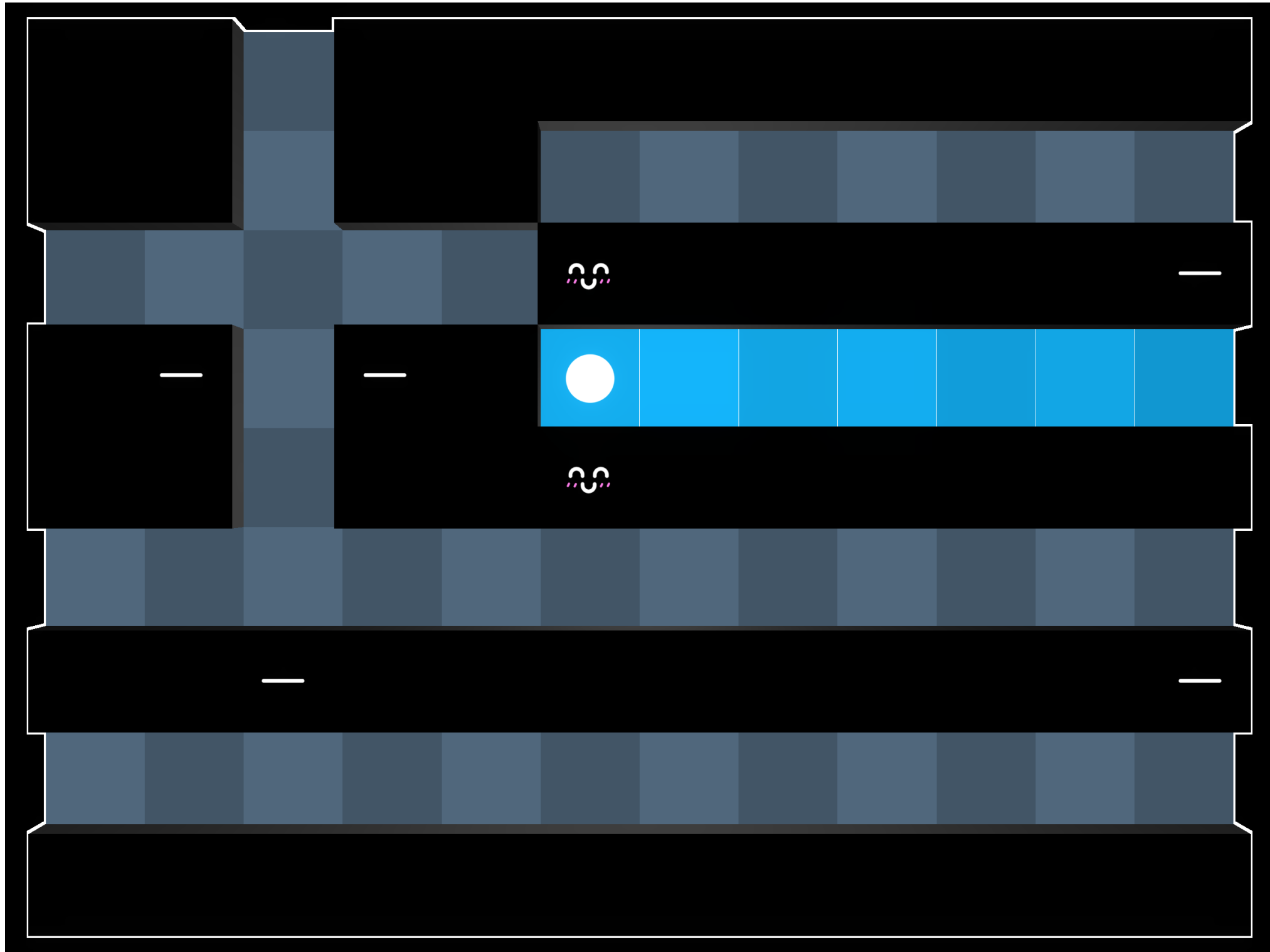
5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

- ¿Variables?
- ¿Qué fórmula reusable sería útil?
- ¿Restricciones?

Dudas/Preguntas

1

- **Solver** para Akari.



Wrap-Up

- **Hoy:**

- Equivalencias
- Expresividad
- Satisfacibilidad

- **Próx. clase:**

- Predicados