

Lógica de predicados



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Equivalencia
- Expresividad
- Satisfacibilidad

- **Plan:**

- Sintaxis de lógica de primer orden
- Semántica de lógica de primer orden
- Inferencia en lógica de predicados

Lógica de predicados

Límites de la lógica proposicional

- Lógica proposicional $\leftarrow$ cualquier función booleana
- ¿Puede expresar todo lo que queremos?
 1. Todas las personas son mortales.
 2. Sócrates es persona.
 3. Por lo tanto, Sócrates es mortal.
- **Ej:**
 1. Si un usuario sigue a otro en una red social, entonces el primero puede ver las publicaciones del segundo.
 2. Alicia sigue a Bob.
 3. Por lo tanto, Alicia puede ver las publicaciones de Bob.
- **No puede expresar:**
 - Propiedades de objetos o cómo se relacionan
 - Cuantificar
- **Extender** la lógica proposicional $\rightarrow$ predicados y cuantificadores
- Lógica de primer orden o de predicados

Predicados

Def.

Sea D un conjunto llamado *dominio de discurso*.

Un *predicado* de aridad n es una función $P: D^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Un predicado de n argumentos tiene *aridad* n .

- Representan propiedades y relaciones
 - $\text{input} \rightarrow \text{bool}$: dice SÍ cuando se cumple la propiedad
 - **Ej:**
 1. Todas las personas son mortales.
 2. Sócrates es persona.

 - 3. Por lo tanto, Sócrates es mortal.
-
1. Si un usuario sigue a otro en una red social, entonces el primero puede ver las publicaciones del segundo.
 2. Alicia sigue a Bob.
-
3. Por lo tanto, Alicia puede ver las publicaciones de Bob.

Cuanticadores

Def.

El *cuanticador universal* $\forall$ forma la afirmación

$\forall x \phi(x) :$ “para todo objeto x del dominio, se cumple $\phi(x)$ ”.

- **Obs:** Si $D = \{d_1, \dots, d_k\}$, entonces $\forall x \phi(x) \equiv \phi(d_1) \wedge \dots \wedge \phi(d_k)$.
- **Ej:** $\forall x (x^2 \geq 0)$

Def.

El *cuanticador existencial* $\exists$ forma la afirmación

$\exists x \phi(x) :$ “existe un objeto x del dominio para el cual se cumple $\phi(x)$ ”

- **Obs:** Si $D = \{d_1, \dots, d_k\}$, entonces $\exists x \phi(x) \equiv \phi(d_1) \vee \dots \vee \phi(d_k)$.
- **Ej:** $\exists x (x^2 < 0)$

Lógica de predicados

- **Formalicemos los ejemplos del principio**

1. Todas las personas son mortales.

2. Sócrates es persona.

3. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

1. Si un usuario sigue a otro en una red social, entonces el primero puede ver las publicaciones del segundo.

2. Alicia sigue a Bob.

3. Por lo tanto, Alicia puede ver las publicaciones de Bob.

Sintaxis

Lenguajes

- Definamos la sintaxis

Def.

Un *lenguaje de primer orden* contiene:

- Variables
- Símbolos de constantes
- Símbolos de función, con aridad fija
- Símbolos de predicado, con aridad fija
- Conectivos lógicos y cuantificadores

- **Ej:**

- Lógica de predicados sobre los naturales
- ¿Variables? ¿Constantes?
- ¿Funciones? ¿Predicados?

Términos

Def.

Los *términos* de un lenguaje se definen recursivamente:

- Toda variable es un término
- Toda constante es un término
- Si f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término.

• Ej:

- ¿Términos sobre los naturales?
- x
- 0
- $x = 0$
- $\text{menor}(x, y)$
- $\text{suc}(x)$
- $\text{suma}(x, \text{suc}(0))$

Fórmulas bien formadas

Def.

Las *fórmulas bien formadas* (FBF) se definen como sigue:

- Si P es un predicado de aridad n y $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una FBF.
- Si α y β son FBF, entonces $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ y $(\alpha \rightarrow \beta)$ son FBF
- Si ϕ es una FBF y x es una variable, entonces $\forall x \phi$ y $\exists x \phi$ son FBF.

• Ej:

- $\forall x (P(f(x)) \rightarrow \exists y (Q(x, y) \wedge \neg P(f(z))))$
- $Q(\exists y P(y), x)$
- $\exists x P(x, y, z)$

• Distintos tipos de fórmulas

Tipos de fórmulas y variables

- Clasificar fórmulas según sus variables

Def.

- En $\forall x \phi$ y $\exists x \phi$, la fórmula ϕ es el *alcance* del cuantificador.
- Una ocurrencia de x está *ligada* si un cuantificador la liga.
- Una ocurrencia de x está *libre* si ningún cuantificador la liga.
- Una fórmula sin variables libres es *cerrada*.
- Una fórmula con variables libres es *abierta*.

- Ej:

- $P(x) \wedge \exists x Q(x, y)$
- $\forall y (P(y) \rightarrow \exists x Q(x, y))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$ v/s $\exists u P(u) \vee \forall v Q(v)$.

Reemplazos

- Variable libre $\rightarrow$ término no ligado

Def.

Sea ϕ una FBF, x una variable libre de ϕ y t un término no ligado en ϕ .

El *reemplazo* de x por t en ϕ es la FBF obtenida reemplazando todas las ocurrencias libres de x por t .

- Ej:

- $\phi_1(x) \equiv P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y)$, ¿ $\phi_1(f(a))$?
- $\phi_2(x) \equiv \forall y P(x, y)$, ¿ $\phi_2(y)$?
- $\phi_3(x) \equiv \forall z P(x, z)$, ¿ $\phi_3(y)$?

Semántica

Semántica

- Debemos darle significado a **todos** los elementos

Def.

Una *estructura* para un lenguaje de primer orden consiste en escoger un dominio de discurso no vacío y decidir qué objeto nombra cada constante, qué función representa cada símbolo de función y qué propiedad o relación representa cada símbolo de predicado.

- **Ej:** $\exists x(\text{suc}(x) = 0), \quad \exists x R(x, y)$
- ¿Satisfacibilidad?

Def.

Una fórmula es *satisfacible* si es verdadera para alguna estructura y alguna elección de valores para sus variables libres.

- **Ej:** ¿No satisfacible?
- **Obs:** No existe un algoritmo que decida la satisfacibilidad de primer orden.

Consecuencia lógica

Def.

Sea ϕ una FBF y Γ un conjunto de FBF.

ϕ es *consecuencia lógica* de Γ si cada estructura y cada elección de valores que satisfacen Γ satisfacen también ϕ .

Denotaremos esto por $\Gamma \models \phi$.

• Ej:

$$\circ \{ \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a) \} \models Q(a)$$

Def.

Sean ϕ y ψ dos FBF.

ϕ y ψ son *(semánticamente) equivalentes* si tienen el mismo valor de verdad en toda estructura y para toda elección de valores de sus variables libres.

Denotaremos esto por $\phi \equiv \psi$.

Equivalencias

- Conocemos algunas equivalencias clásicas

Prop.

Las siguientes equivalencias se cumplen para las FBF $\phi(x)$ y $\psi(x)$:

- $\neg \forall x \phi(x) \equiv \exists x \neg \phi(x),$
- $\neg \exists x \phi(x) \equiv \forall x \neg \phi(x),$
- $\forall x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x \phi(x) \wedge \forall x \psi(x),$
- $\exists x (\phi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x \phi(x) \vee \exists x \psi(x),$
- $\forall x \forall y \phi(x, y) \equiv \forall y \forall x \phi(x, y),$
- $\exists x \exists y \phi(x, y) \equiv \exists y \exists x \phi(x, y).$

- **Ej:**

- $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \text{ v/s } \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \text{ v/s } \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \text{ v/s } \exists y \forall x (x + y = 0)$

Dudas/Preguntas

Problema del día

2. Un lector de strings recibe un mensaje $w = w_1 \cdots w_n$, escrito como una palabra no vacía sobre el alfabeto $\{a, b\}$. Podemos ver el mensaje como una estructura $\mathcal{M}_w$ cuyo dominio es el conjunto de posiciones $\{1, \dots, n\}$ y cuyo lenguaje contiene los predicados A , B y $<$, interpretados por

$$A(i) \iff w_i = a, \quad B(i) \iff w_i = b,$$

y por el orden usual entre las posiciones. Así, las variables representan posiciones de la palabra, no sus letras.

- (a) Construya fórmulas abiertas $\text{Primera}(x)$, $\text{Ultima}(x)$ y $\text{Siguiente}(x, y)$ que expresen, respectivamente, que x es la primera posición, que x es la última posición y que y es la posición inmediatamente posterior a x .
- (b) Usando las fórmulas del inciso anterior como abreviaturas, construya una FBF cerrada para cada una de las siguientes propiedades de w :
 - (I) la primera y la última letra son iguales;
 - (II) cada aparición de a está seguida inmediatamente por una b ;
 - (III) todas las apariciones de a están antes que todas las apariciones de b ;
 - (IV) el bloque consecutivo ab aparece exactamente una vez.
- (c) Determine cuáles de las cuatro fórmulas construidas son verdaderas en cada una de las palabras

abba, aabb, abab.

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Sintaxis de lógica de primer orden
- Semántica de lógica de primer orden
- Inferencia en lógica de predicados

- **Próx. clase:**

- Demostraciones en lenguaje natural