

Tema 2-3

Inducción en los naturales



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Definiciones recursivas
- Funciones en objetos recursivos
- Inducción estructural

- **Plan:**

- Inducción débil
- Inducción débil con caso base arbitrario
- Inducción fuerte
- Inducción fuerte con múltiples casos bases
- Contraejemplo minimal

Inducción

Inducción en los naturales

Prin.

Sea S un conjunto de objetos contruidos a partir de objetos básicos B y reglas de producción $\mathcal{F}$.

Sea $P(s)$ una propiedad que depende de un objeto $s \in S$ tal que se cumple lo siguiente:

- $P(b)$ es verdadera para todo $b \in B$ (caso base)
- Para toda $f \in \mathcal{F}$ de aridad k y objetos $s_1, \dots, s_k \in S$, se cumple $P(s_1) \wedge \dots \wedge P(s_k) \rightarrow P(f(s_1, \dots, s_k))$ (paso inductivo)

Entonces, $P(s)$ es verdadera para todo $s \in S$.

- $\mathbb{N}$ definido por $B = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{n \mapsto n + 1\}$.
 - $P(0)$ es verdadera (caso base)
 - $P(s) \rightarrow P(s + 1)$ es verdadera (paso inductivo)

Inducción débil

Prin.

Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

- $P(0)$ es verdadera (caso base)
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \rightarrow P(n+1)$ (paso inductivo)

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

• Ej:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Todo tablero de ajedrez de tamaño $2^n \times 2^n$ con una casilla faltante puede ser cubierto completamente con piezas de tromino



Sobrecarga

- Otros principios de inducción “sobrecargando” P

Prin.

Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

- $P(0)$ es verdadera (caso base)
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \rightarrow P(n+1)$ (paso inductivo)

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $P(n) = Q(n_0 + n)$
 - $P(0)$ es verdadera $\leftrightarrow Q(n_0)$ es verdadera
 - $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) \rightarrow P(n+1) \leftrightarrow \forall n \geq n_0$, $Q(n) \rightarrow Q(n+1)$
- $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N} \leftrightarrow Q(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$.

Inducción débil con caso base arbitrario

Prin.

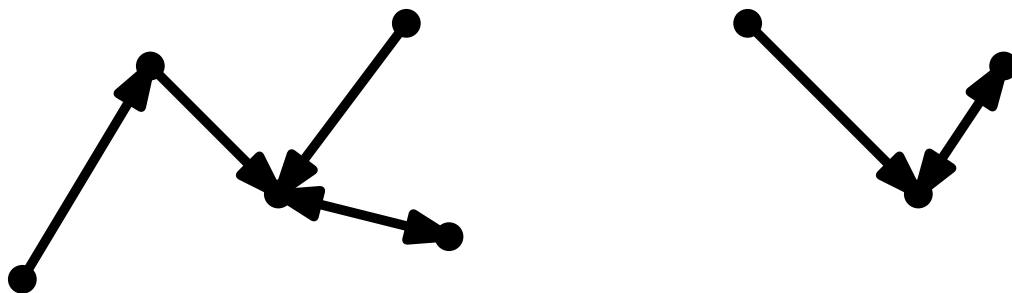
Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base)
- Para todo $n \geq n_0$, $P(n) \rightarrow P(n+1)$ (paso inductivo)

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

• Ej:

- $2n + 1$ personas con $n \geq 1$, todas a distancias distintas



- Disparan a la más cercana
- Muestre que siempre sobrevive al menos una persona

Inducción fuerte

- **Sobrecargar:** $P(n) = Q(n_0) \wedge \cdots \wedge Q(n + n_0)$

Prin.

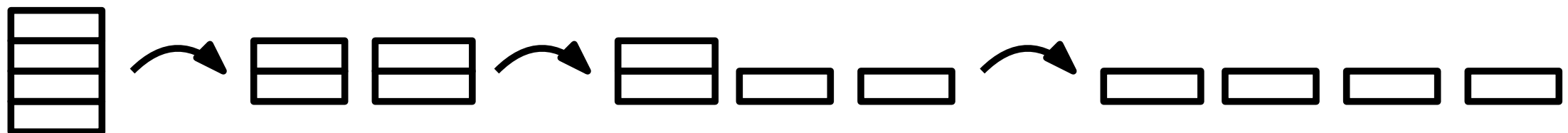
Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

- $P(n_0)$ es verdadera (caso base)
- Para todo $n \geq n_0$, $(P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)) \rightarrow P(n + 1)$ (p. ind.)

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

- Ej:

- Juego comienza con $n \geq 1$ fichas en una pila



- Dividir pila de tamaño k en dos pilas de tamaños a y b tal que $a + b = k$
- Puntaje del movimiento es ab .
- **Mostrar:** puntaje es siempre $\frac{n(n-1)}{2}$

Inducción fuerte con múltiples casos bases

- **Sobrecargar:** $P(n) = Q(n_0) \wedge \cdots \wedge Q(n_1) \wedge \cdots \wedge Q(n + n_1)$

Prin.

Sea $P(n)$ una propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

- $P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n_1)$ es verdadera (caso base)
- Para todo $n \geq n_1$, $(P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)) \rightarrow P(n + 1)$ (p. ind.)

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

- **Gracia:** pruebo HI desde n_1 , puedo usar desde n_0 .
- **Ej:**
 - Cajas de 5 nuggets, bolsas de 3 nuggets.
 - Para todo $n \geq 8$, es posible comprar exactamente n nuggets.

Contraejemeplo minimal

Contraejemplo minimal

- **Otra perspectiva:** contraejemplo minimal
- Principio del buen orden

Prin.

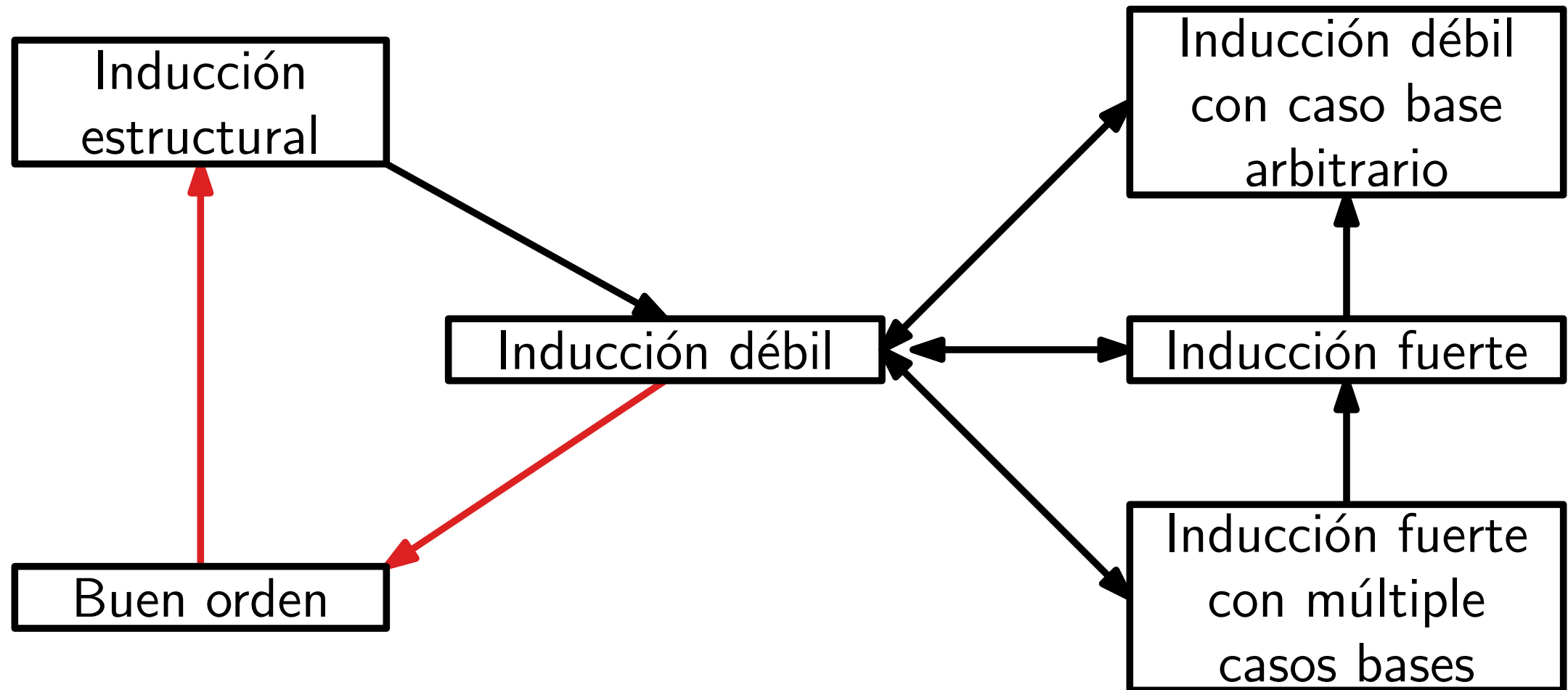
Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ y no vacío.

Entonces, S tiene un elemento mínimo

- Usualmente de la forma:
 - Supongo que hay un contraejemplo.
 - Buen orden $\rightarrow$ hay uno mínimo.
 - Encuentro uno más pequeño $\rightarrow \leftarrow$.
- Ej:
 - Cajas de 5 nuggets, bolsas de 3 nuggets.
 - Para todo $n \geq 8$, es posible comprar exactamente n nuggets.

Equivalencias del principio de inducción

- Equivalencias entre principios



- Equivalencias entre principios
- ¿Por qué son válidos?

Dudas/Preguntas

- **Hoy:**

- Inducción débil
- Inducción débil con caso base arbitrario
- Inducción fuerte
- Inducción fuerte con múltiples casos bases
- Contraejemplo minimal

- **Próx. clase:**

- Recuerdo relaciones