

Tema 2-5

Repaso de relaciones



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Inducción débil
- Inducción débil con caso base arbitrario
- Inducción fuerte
- Inducción fuerte con múltiples casos bases
- Contraejemplo mínimo

- **Plan:**

- Relaciones
- Cómo representarlas
- Relaciones de orden
- Relaciones de equivalencia
- Funciones

Relaciones

Relaciones

- **Objetivo:** especificar interacciones entre objetos.
 - Cumplen un rol similar al de los *predicados* de la lógica de primer orden.
- Nos centraremos en el caso *binario*.

Def.

Una *relación (binaria)* R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$.

Si $(a, b) \in R$, usualmente lo denotamos como $a R b$.

- **Ej:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.
 - $R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.
 - $R_2 = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$.
 - $R_3 = A \times B$.
 - $R_4 = \emptyset$.
- Un par está relacionado cuando “se cumple la propiedad”
- $\chi_R: A \times B \rightarrow \text{bool}$

Representando una relación

- **Ej:** $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$.
- Vía una *tabla o matriz*
 - Filas en A , columnas en B , marcar si $a R b$.
 - Útil para decidir si un par (a, b) está relacionado.
- Vía un *grafo bipartito*
 - Dos columnas con nodos en A y B . Conectar si $a R b$.
 - Más compacta

Relaciones sobre un conjunto

- **De particular interés:** el caso $A = B$.
- **Relaciones ampliamente usadas:**
 - $\leq$,
 - $|$,
 - $\subseteq$,
 - es ancestro de
 - sigue a
 - hay un vuelo directo desde a hacia b
- **Representación como dígrafos:**
 - Nodos en A .
 - Flecha desde a hacia b si y sólo si $a R b$.
 - **Ojo:** esta representación sólo está disponible cuando $A = B$.

Clasificando relaciones sobre conjuntos

Def.

Una relación binaria R sobre un conjunto A se dirá:

- *reflexiva* si $a R a$ para todo $a \in A$.
- *simétrica* si $a R b$ implica $b R a$ para todo $a, b \in A$.
- *antisimétrica* si $a R b$ y $b R a$ implican $a = b$ para todo $a, b \in A$.
- *transitiva* si $a R b$ y $b R c$ implican $a R c$ para todo $a, b, c \in A$.

- **Obs:** $R \neq \emptyset$ y R reflexiva, simétrica y antisimétrica $\implies R$ es la igualdad.
- **Ej:** Sobre $\mathbb{Z}$:
 - $x \leq y$
 - $x - y$ es par
 - $x + y \leq 3$
 - $x \cdot y$ es potencia de 2.

Relación de orden

- Ciertos órdenes funcionan como comparadores.

Def.

Sea R una relación binaria sobre A .

R es un *orden (parcial)* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si **además** para todo $a, b \in A$ se cumple que $a R b$ o $b R a$, entonces diremos que R es un *orden total*.

- Ej:

- $x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$
- $A \subseteq B$ sobre 2^X
- $x \mid y$ sobre $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
- Orden lexicográfico sobre Σ^* .
- La relación “ser prefijo” en Σ^* .

Relación de equivalencia

- “Igualdad” bajo algunos criterios

Def.

Sea R una relación binaria sobre A .

R es una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

- Ej:
 - $a \equiv_p b$
 - “tener mismo largo” sobre Σ^*
 - “representar el mismo número” sobre $\{0, 1\}^* \setminus \{\varepsilon\}$

Clases de equivalencia

- **Clase de equivalencia:** objetos relacionados con un objeto fijo.

Def.

Sea R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$.

La *clase de equivalencia* de a es el conjunto:

$$[a]_R = \{b \in A \mid a R b\}.$$

- **Ej:**
 - ¿Clases de $a \equiv_3 b$?
 - ¿Clases de $a \equiv_p b$?
- ¿Cuándo dos objetos dan la misma clase?

Prop.

Sea R una relación de equivalencia sobre A . Para todo $a, b \in A$, LSSE:

- $[a]_R = [b]_R$
- $a R b$
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Particiones

- Las clases de equivalencia son *estructuradas*.

Def.

Una familia $\mathcal{P}$ de subconjuntos de A es una *partición* de A si

- Para todo $P \in \mathcal{P}$, se tiene $P \neq \emptyset$.
- Para todo $P, Q \in \mathcal{P}$, si $P \neq Q$, entonces $P \cap Q = \emptyset$.
- Para todo $a \in A$, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $a \in P$.

- Las clases **particionan** el espacio.

Teo.

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A .

El conjunto de clases de equivalencia $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ es una partición de A .

Dicho conjunto se llama *conjunto cociente* de A por R .

Particiones

Teo.

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A .

El conjunto de clases de equivalencia $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ es una partición de A .

Dicho conjunto se llama *conjunto cociente* de A por R .

- **Ej:** $\mathbb{Z}/\equiv_3$.
- Recíproca: Toda partición induce una relación de equivalencia.

Teo.

Dada una partición $\mathcal{P}$ de un conjunto A , la relación $R_{\mathcal{P}}$ definida por

$$a R_{\mathcal{P}} b \quad \text{si y sólo si} \quad \exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } a, b \in P$$

es una relación de equivalencia.

Más aún, sus clases de equivalencia son los elementos de $\mathcal{P}$.

- **Ej:** $L_n = \{w \in \{0, 1\}^* : |w| = n\}$.

Relaciones k -arias

- Podemos generalizar a otras aridades

Def.

Una *relación k -aria* R entre conjuntos $A_1, \dots, A_k$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$.

En caso de que $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$, diremos que es una *relación k -aria sobre A* .

- Ej:
 - Ser primo sobre $\mathbb{N}$.
 - Suma: triples (a, b, c) tales que $a + b = c$ sobre $\mathbb{N}$.
 - (estudiante, curso, semestre) en una base de datos relacional

Función

- Caso especial de relaciones binarias

Def.

Una *función* $f : A \rightarrow B$ es una relación $f \subseteq A \times B$ tal que para todo $a \in A$ existe un único $b \in B$ con $(a, b) \in f$.

- Elementos de las funciones

Def.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y $a \in A$.

- Si $(a, b) \in f$, escribimos $f(a) = b$,
- b es *imagen* de a y a es una *preimagen* de b .
- A se llama *dominio* de f y B *codominio* de f .
- El conjunto $\{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$ es la *imagen* de f .

Funciones y composición

Def.

Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Diremos que f es:

- *inyectiva* si para $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ tenemos $f(a_1) \neq f(a_2)$;
- *sobreyectiva* si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$;
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Def.

Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones.

La *composición* de f y g es la función $g \circ f: A \rightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Si $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, existe una única *inversa* $f^{-1}: B \rightarrow A$.
 $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.

Prop.

Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones.

- Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Relaciones
- Cómo representarlas
- Relaciones de orden
- Relaciones de equivalencia
- Particiones/clases de equivalencia
- Funciones y composición

- **Próx. clase:**

- Operaciones sobre relaciones