

Tema 3-1

Principio multiplicativo



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Operaciones elementales
- Inversas, composición y potencias
- Clausuras

- **Plan:**

- Principio multiplicativo
- Conteo

Conteo

Operaciones de conjuntos

- Problemas de **conteo**:
 - Prevalentes en ciencias de la computación
 - Conteo de objetos discretos
 - Conteo de pasos en análisis de algoritmos
- Herramientas de combinatoria:
 - Principio multiplicativo
 - Objetos combinatoriales
 - Principio aditivo
 - Principio de inclusión-exclusión
 - Principio biyectivo
 - Principio del palomar
 - Recurrencias
 - Técnicas analíticas

Principio multiplicativo

Principio multiplicativo

Prin.

Supongamos que un procedimiento consta de $k \geq 1$ tareas sucesivas $T_1, \dots, T_k$. Si

- la tarea T_1 puede realizarse de n_1 maneras,
- Para todo $i \in \{2, \dots, k\}$, una vez fijas las tareas $T_1, \dots, T_{i-1}$ la tarea T_i puede realizarse de n_i maneras.

Entonces, el procedimiento puede realizarse de $n_1 \dots n_k$ formas.

- **Dem:**
- Versión equivalente

Prin.

Si $A_1, \dots, A_k$ son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \dots |A_k|.$$

- Usar para contar **objetos combinatoriales**.

Objetos con orden: Listas y Permutaciones

Listas

- ¿Cuántos bytes hay?

Def.

Sea X un conjunto finito.

Una *lista (ordenada)* de X de largo k es una secuencia con k elementos $x_1, \dots, x_k$ con $x_i \in X$ para todo i .

- También conocidas como *strings* de largo k sobre un alfabeto X .

Teo.

El número de listas de largo k de un conjunto de n elementos es n^k .

- ¿Patentes (nuevas) posibles en Chile?
- ¿Números pares de n dígitos?
- ¿Cuántas funciones de A a B hay? Con $|A| = a$ y $|B| = b$.

Permutaciones

- 7 personas esperan atención médica. ¿Cuántos órdenes distintos hay para atenderlas?

Def.

Sea X un conjunto finito.

Una *permutación* de X es una lista ordenada que contiene todos los elementos de X **exactamente** una vez.

Teo.

El número de permutaciones de un conjunto de n elementos es

$$n! = \prod_{i=1}^n i = n \cdot \dots \cdot 1$$

- **Obs:** $0! = 1$
- ¿De cuántas formas se pueden ordenar n libros distintos en un estante si cada uno puede colocarse derecho o invertido?

k -permutaciones

- Un reproductor tiene 12 canciones y queremos armar una lista de reproducción de largo 4 sin repetir canciones. ¿Cuántas playlists hay?

Def.

Sea X un conjunto finito.

Una k -permutación de X es una lista de largo k donde cada elemento de X aparece a lo más una vez.

Teo.

El número de k -permutaciones de un conjunto de $n \geq k$ elementos es

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- ¿Números de tres dígitos con sólo dígitos impares y sin repetir?
- Hay n ciudades interesantes en Chile.
Usted quiere visitar k de ellas en algún orden y en cada una hacer una de las q actividades interesantes disponibles.

Multipermutaciones

- ¿Anagramas de BANANA?
 - **Sobrecontar**

Def.

Sea $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ un conjunto finito y $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$.

Una *$\vec{a}$ -multipermutación* de X es una lista ordenada que contiene el objeto x_i **exactamente** a_i veces.

Teo.

Sea $\vec{a} \in \mathbb{N}^k$ y $n = \sum_{i=1}^k a_i$.

El número de $\vec{a}$ -multipermutaciones de un conjunto $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ es

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}$$

- ¿Bitstrings de largo n con r unos?
- Queremos sacar la foto del curso: son n estudiantes y les repartimos r gorros rojos, s azules y t verdes. ¿Cuántas posibles fotos hay?

Objetos sin orden: Conjuntos

Conjuntos

- En el Loto se eligen 6 números distintos entre 1 y 41. ¿Cuántas apuestas distintas se pueden hacer?

Def.

Sea X un conjunto finito.

Los *k -conjuntos* de X son los subconjuntos de X de tamaño k .

- También conocidos como *k -combinaciones* sobre X .

Teo.

El número de k -conjuntos de un conjunto de $n \geq k$ elementos es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k, n-k}.$$

- ¿Bitstrings de largo n con r unos?
- ¿Anagramas de BANANA?
- De n personas se eligen k para un comité con presidente y vicepresidente.

Multiconjuntos

- ¿Qué pasa si podemos repetir números en el loto?
 - **barras y estrellas.**

Def.

Sea X un conjunto finito.

Los *k -multiconjuntos* de X son “subconjuntos” de X donde cada objeto puede aparecer repetidas veces y el número total de objetos es k .

- También conocidos como *k -combinaciones con repetición* sobre X .

Teo.

El número de k -multiconjuntos de un conjunto de $n \geq 1$ elementos es

$$\binom{\binom{n}{k}}{k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

- Elegimos k bolitas entre n sabores de helado y para cada bolita uno de q toppings.

Recapitulación

Recapitulación

- **Con orden:** listas y permutaciones.

Objeto	Largo	Restricción	¿Cuántos?
Listas	k	sin restricción	n^k
Permutaciones	n	$c/u = 1$	$n!$
k -permutaciones	k	$c/u \leq 1$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\vec{a}$ -multipermutación	$\sum_{i=1}^k a_i$	objeto i : a_i veces	$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$ donde $n = \sum_{i=1}^k a_i$

- **Sin orden:** conjuntos.

Objeto	Sel.	¿Repetición?	¿Cuántos?
Conjuntos	k	sin repetición	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Multiconjuntos	k	con repetición	$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

Más problemas de conteo.

- ¿Cuántos strings de longitud n sobre $\{0, 1, \dots, m\}$ tienen exactamente k símbolos distintos de 0, sin repetir ninguno de ellos?
- ¿De cuántas formas puedo poner 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?
- ¿Cuántas sucesiones crecientes de k elementos en $\{1, \dots, n\}$ existen?
- ¿Cuántos pares de subconjuntos $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$ existen con $|A| = a$ y $|B| = b$?
- ¿Cuántos pares de subconjuntos $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$ existen?
- Usted tiene a pelotas azules distinguibles y r pelotas rojas distinguibles. ¿De cuántas formas se pueden hacer k parejas de pelotas azules y rojas?
- ¿Cuántos caminos de $(0, 0)$ a (m, n) , usando pasos $\uparrow$ y $\rightarrow$, pasan por (a, b) ?

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Principio multiplicativo
- Objetos con orden: listas y permutaciones.
- Objetos sin orden: conjuntos.

- **Próx. clase:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión.