

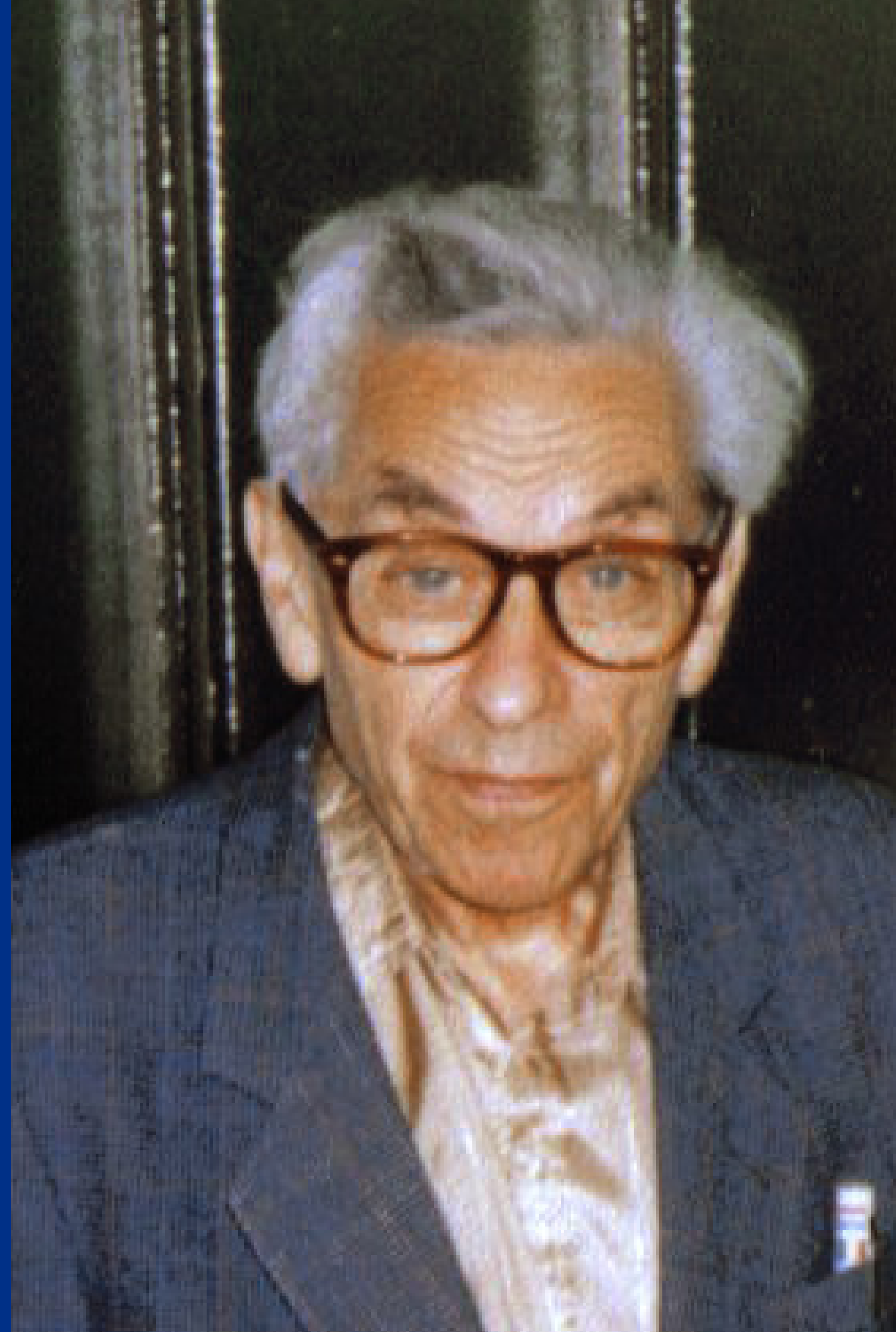
Tema 3-3

Otros principios fundamentales



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Principio aditivo
- Principio de inclusión-exclusión

- **Plan:**

- Principio biyectivo y demostraciones combinatoriales
- Principio del palomar

Principio biyectivo y demostraciones combinatoriales

Demostraciones combinatoriales

- Anagramas de BANANA.
 - Via $\vec{a}$ -multipermutaciones: $\frac{6!}{2! 3!}$.
 - Via k -conjuntos: $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1$
 - ¿Conclusión?

Def.

Una *demostración combinatorial* de una identidad es un argumento que explica por qué ambos lados cuentan el mismo conjunto de objetos.

- Versión conjuntos: *principio biyectivo*.

Prin.

Si A y B son conjuntos finitos y existe una biyección $f: A \rightarrow B$, entonces $|A| = |B|$.

- **Usualmente:** biyección **X**, ambos lados cuentan lo mismo **✓**

Ejemplos

- Simetría de los coeficientes binomiales: para $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- Para $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$.

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

- Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$4^n - 3^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{n-k}.$$

- Identidad de Vandermonde: $m, n, r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

- Identidad del palo de Hockey: $n, r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r \leq n$,

$$\sum_{j=r}^n \binom{j}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Identidades polinomiales

- Hasta ahora: identidades con números naturales
- ¿Polinomios?

Lem.

Sea $r \in \mathbb{N}$ y $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_r]$.

Si $P(a_1, \dots, a_r) = Q(a_1, \dots, a_r)$ para todo $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r$,
entonces $P = Q$.

- **Conclusión:** basta con probar para variables en $\mathbb{N}$.
- Binomio de Newton: $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x + y)^n.$$

- Sea $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1 + x)^{n-1}.$$

Principio del palomar

Principio del palomar

- En un torneo de ajedrez participan $n \geq 2$ personas, y cada par puede jugar a lo más una partida entre ellos. Al terminar el torneo, hay dos participantes que terminaron la misma cantidad de partidas. ¿Por qué?
- **Esencia del argumento:** principio del palomar.

Prin.

Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $m > k \geq 1$.

Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

- Cuatro amigos compiten durante 37 días. Cada día hay un único ganador y un único último lugar, pero puede haber un empate entre el segundo y el tercer lugar. Muestre que en dos días se obtiene la misma clasificación.
- Tenemos $n^2 + 1$ puntos en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, con $n \geq 1$ entero. Muestre que dos de ellos están a distancia a lo más $\sqrt{2}/n$.

Más ejemplos: palomar

Prin.

Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $m > k \geq 1$.

Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos dos objetos.

- Tenemos un conjunto A de diez enteros positivos distintos, todos menores que 100. ¿Existen dos subconjuntos disjuntos y no vacíos de A cuyos elementos sumen lo mismo?
- Ramsey invita a n amigos:
 - Cada uno tiene un asiento asignado en una mesa redonda.
 - Los amigos ignoran a Ramsey y se sientan dónde quieren.
 - Existe una rotación de manera que al menos dos amigos quedan en su puesto.
- Elegimos $n + 1$ enteros distintos de $\{1, 2, \dots, 2n\}$, con $n \geq 1$. Muestre que uno de los elegidos divide a otro.

Principio de palomar generalizado

- En un control se ofrecen cinco preguntas y cada estudiante debe escoger y responder exactamente tres. Si rinden el control 31 estudiantes, muestre que al menos cuatro escogieron las mismas preguntas.
- **Esencia del argumento:** principio del palomar *generalizado*

Prin.

Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $m > k \geq 1$.

Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos $\left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil$ objetos.

- Cuatro amigos compiten durante 37 días. Cada día hay un único ganador y un único último lugar, pero puede haber un empate entre el segundo y el tercer lugar. Muestre que en dos días se obtiene la misma clasificación.
- Ramsey organiza una fiesta con seis personas. Muestre que siempre hay tres personas que se conocen mutuamente o tres que son mutuamente desconocidas.

Más ejemplos: palomar generalizado

Prin.

Sean $m, k \in \mathbb{N}$ con $m > k \geq 1$.

Si se distribuyen m objetos en k cajas, entonces alguna caja contiene al menos $\left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil$ objetos.

- Cada punto en una grilla de 3×7 es coloreado de rojo o azul. Muestre que siempre existe un rectángulo cuyos vértices son puntos del mismo color.
- En un grupo de diez personas hay exactamente 38 parejas de personas que se conocen. Mostremos que hay cuatro personas que se conocen mutuamente.

Principio de palomar versión promedios

- Reformulación más poderosa de palomar

Prin.

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

- Permite deducir ambos principios del palomar.
- Famosamente defendido por Dijkstra.
- **Dem:**
- **Obs:** argumentos diferentes, no hay que pensar en asignar.
- En un control se ofrecen cinco preguntas y cada estudiante debe escoger y responder exactamente tres. Si rinden el control 31 estudiantes, muestre que al menos cuatro escogieron las mismas preguntas.

Más ejemplos: palomar promedios

Prin.

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$\min_{1 \leq i \leq n} a_i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i.$$

- Ramsey invita a n amigos:
 - Cada uno tiene un asiento asignado en una mesa redonda.
 - Los amigos ignoran a Ramsey y se sientan dónde quieren.
 - Existe una rotación de manera que al menos dos amigos quedan en su puesto.
- En un grupo de diez personas hay exactamente 38 parejas de personas que se conocen. Mostremos que hay cuatro personas que se conocen mutuamente.
- Escribimos los números $1, 2, \dots, 20$ alrededor de un círculo, en cualquier orden. Muestre que tres números consecutivos suman al menos 32 y que otros tres números consecutivos suman a lo más 31.

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Demostraciones combinatoriales
- Identidades de polinomios
- Principio de palomar
- Principio de palomar generalizado
- Principio de palomar versión promedios

- **Próx. clase:**

- Recurrencias
- Métodos elementales de resolución.