

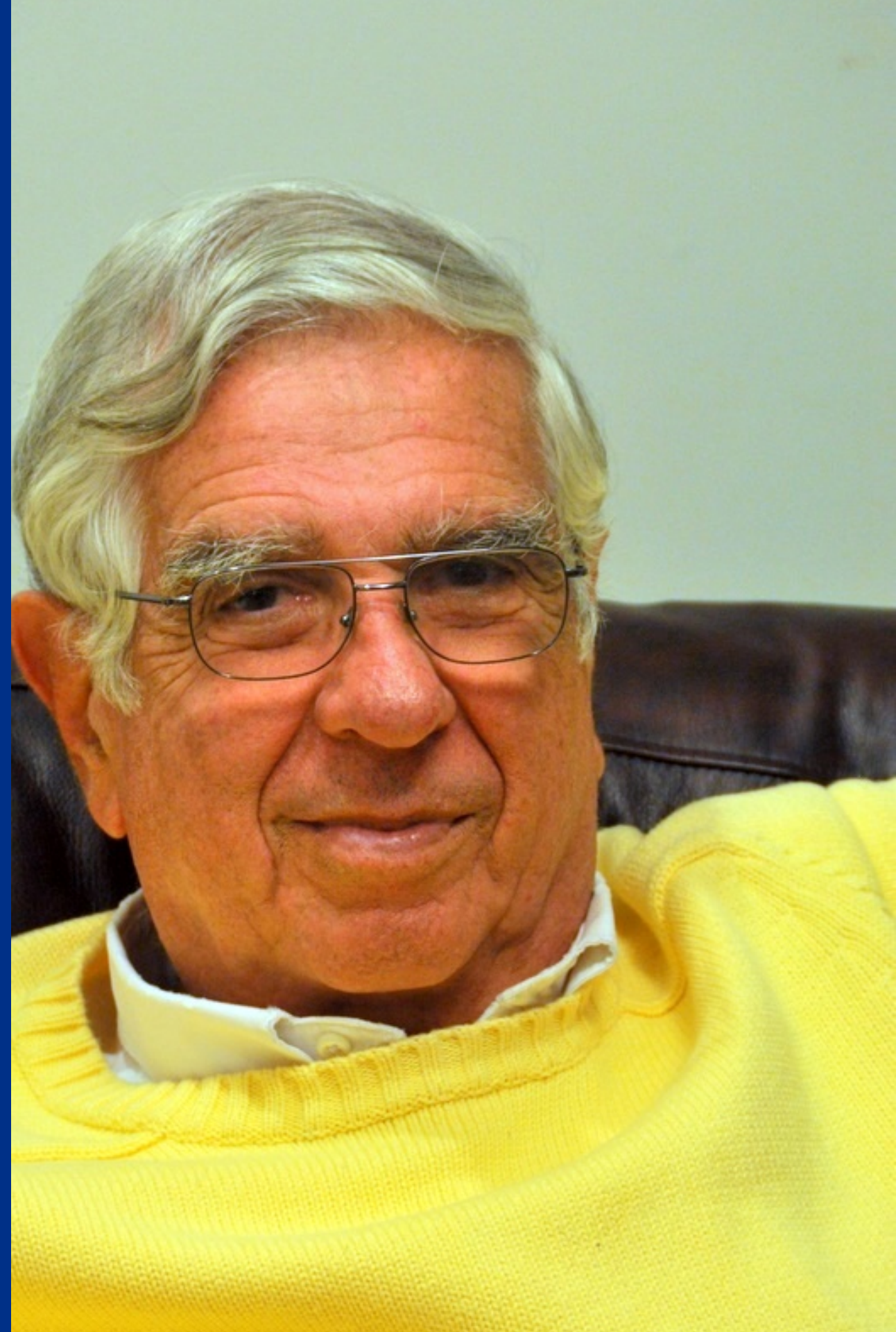
Tema 3-6

Convolución y binomio generalizado



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo/Plan

Recuerdo y plan

- **Recuerdo:**

- Funciones generatrices
- Resolviendo recurrencias con funciones generatrices

- **Plan:**

- Convolución de sucesiones
- Binomio generalizado

Recuerdo: Catálogo de FGO

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
c	$\frac{c}{1-x}$
$(-1)^n$	$\frac{1}{1+x}$
r^n	$\frac{1}{1-rx}$
$\binom{m}{n}$	$(1+x)^m$

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
$[n=0]$	1
$[n=t]$	x^t
$[d n]$	$\frac{1}{1-x^d}$

Convolución

Convolución de sucesiones

- Expandir catálogo + más recurrencias $\rightarrow$ nueva operación.

Def.

Sean $a = (a_n)_{n \geq 0}$ y $b = (b_n)_{n \geq 0}$ dos sucesiones.

Su *convolución* es $a \star b = ((a \star b)_n)_{n \geq 0}$, donde

$$(a \star b)_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

- También escribiremos $a_n \star b_n = (a \star b)_n$.
- ¡Ojo! $\star$ opera sobre las sucesiones completas.
- **Ej:** aparece naturalmente al construir objetos que comparten *presupuesto*.
 - Árboles binarios

Producto y convolución

- ¿Qué sucesión corresponde al producto de dos FGO?

Prop.

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

Entonces,

$$A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n \star b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Dem:

- Ej:
 - **Expandir catálogo:** $a_n = n + 1$. ¿ $A(x)$?

Recurrencias con convolución

Prop.

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n.$$

Entonces,

$$A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n \star b_n) x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

- **Dem:**

- **Ej:**

- $2a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = (n+1)2^n$ con $a_0 = 1$.

- $a_n = \binom{n+m-1}{n}$, entonces $A(x) = \frac{1}{(1-x)^m}$.

Binomio generalizado

Binomio generalizado

- Expandir catálogo + más recurrencias $\rightarrow$ convolución.
- Último ejemplo: $(1 - x)^{-m} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+m-1}{n} x^n$
- Expandir catálogo + más recurrencias $\rightarrow$ teo. del binomio generalizado

Def.

Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$,

definimos el *coeficiente binomial generalizado* $\binom{r}{k}$ como

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1)}{k!}. \quad \binom{r}{0} = 1.$$

- Ej:
 - $\binom{1/2}{3}$?
 - $\binom{-2}{3}$?

Propiedades del binomio generalizado

Def.

Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$,

definimos el *coeficiente binomial generalizado* $\binom{r}{k}$ como

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1)}{k!}. \quad \binom{r}{0} = 1.$$

Prop.

Para $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos

- $k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$ cuando $k \geq 1$.
- $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$ cuando $k \geq 1$.
- $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{k 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}$ cuando $k \geq 1$.
- $\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}$.

Dem:

- Ej: $\binom{k-5/2}{k}$

Teorema del binomio generalizado

Teo.

Para $r \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente igualdad como FGO

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k = (1 + x)^r.$$

- Expande el catálogo ✓

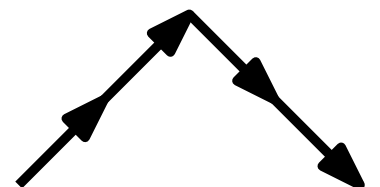
- Ej:

- $A(x) = \sqrt{1 - 4x}$ ¿Quién es a_n ?

- Más recurrencias ✓

- Ej:

- **Catalán:** $c_{n+1} = c_n \star c_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$ para todo $n \geq 0$ y $c_0 = 1$.



Problemas de conteo

Teo.

Para $r \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente igualdad como FGO

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k = (1 + x)^r.$$

- Ej:

- ¿Cuántas palabras binarias de largo n podemos formar si debemos marcar exactamente dos posiciones distintas? Dos objetos son distintos si cambia alguna letra o el conjunto de posiciones marcadas.

0 1 0 1 0 0

(The numbers 1 and 0 in the sequence are circled in the original image.)

Problemas de conteo

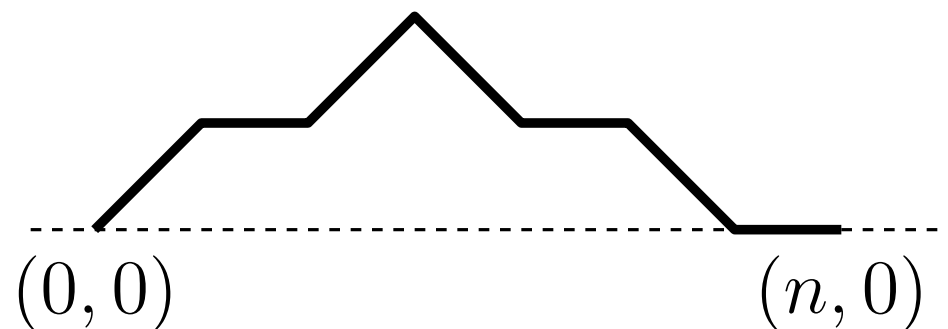
Teo.

Para $r \in \mathbb{R}$, tenemos la siguiente igualdad como FGO

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k = (1 + x)^r.$$

- Ej:

- ¿Cuántos caminos hay de $(0, 0)$ a $(n, 0)$ si podemos usar pasos $(1, 1)$, $(1, -1)$ y $(1, 0)$, sin pasar por debajo del eje horizontal?



Catálogo de FGO

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
c	$\frac{c}{1-x}$
$(-1)^n$	$\frac{1}{1+x}$
r^n	$\frac{1}{1-rx}$
$\binom{m}{n}$	$(1+x)^m$
$n+1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$
$\binom{n+m-1}{n}$	$\frac{1}{(1-x)^m}$

Sucesión a_n	FGO $A(x)$
$[n=0]$	1
$[n=t]$	x^t
$[d \mid n]$	$\frac{1}{1-x^d}$
$\binom{r}{n}$	$(1+x)^r$
$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$	$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Convolución de sucesiones
- Binomio generalizado
- Catalán y problemas de conteo

- **Próx. clase:**

- Principios de conteo para funciones generatrices