Coloreos

UNIVERSIDAD DE CHILE

Arturo Merino



Plan

Recuerdo y plan

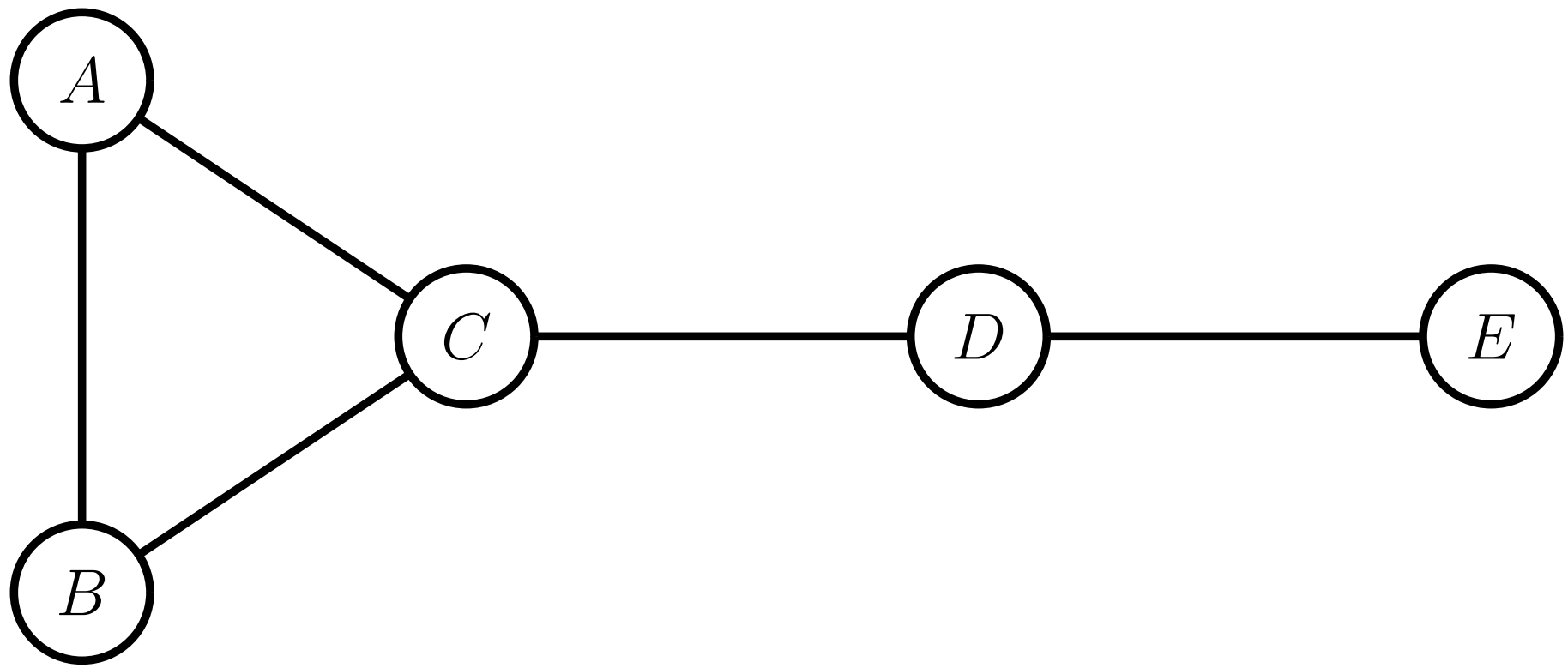
- **Recuerdo:**
  - Árboles generadores.
  - Caminos de costo mínimo.
  - Caminos más cortos.

- **Plan:**
  - Coloreos y restricciones de incompatibilidad.

Coloreos y número cromático

Asignar frecuencias

- Podemos modelar restricciones de incompatibilidad.
- **Ej:** Asignemos frecuencias a cinco antenas.
  - Una arista une antenas que interfieren al usar la misma frecuencia.



- ¿Cuántas bandas de frecuencia necesitamos?

Coloreos y número cromático

- Podemos modelar grupos compatibles mediante coloreos.

Def.

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y sea $k \in \mathbb{N}$.

Un *coloreo válido* de G es una asignación de colores a sus vértices tal que, si $uv \in E$, entonces u y v reciben colores distintos.

Decimos que G es *k-coloreable* si tiene un coloreo válido usando a lo más k colores.

- Nos gustaría **minimizar** la cantidad de colores.

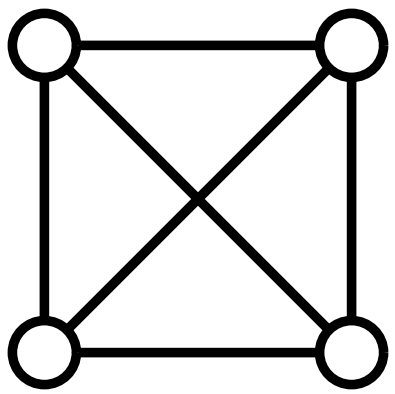
Def.

Sea G un grafo simple.

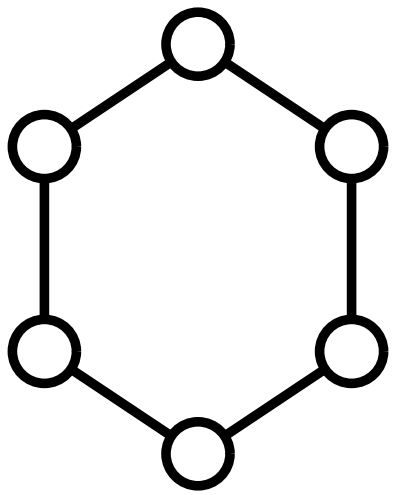
El *número cromático* de G, denotado $\chi(G)$, es el menor número de colores necesarios para colorear válidamente G.

Número cromático

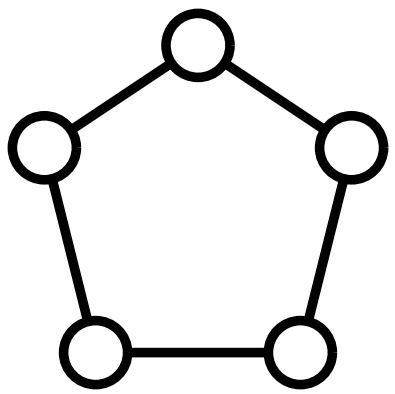
- **Ej:** ¿$\chi(K_n)$, $\chi(C_n)$ y $\chi(W_n)$?



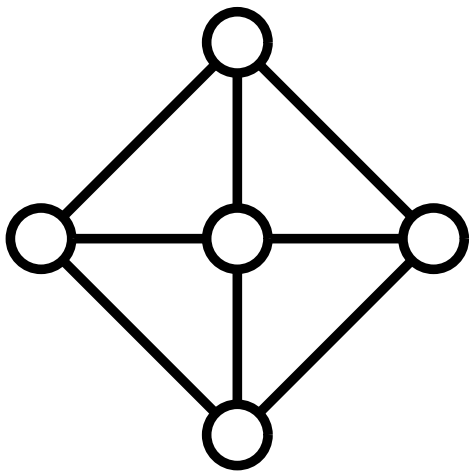
K_4



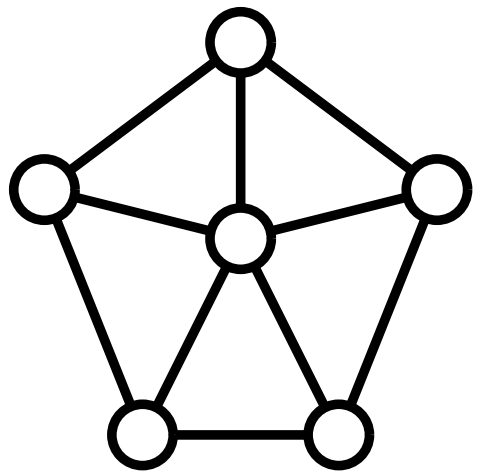
C_6



C_5



W_5



W_6

Coloreo avaro

- ¿Forma **más natural** de resolver el problema de coloreo?

Alg.

Entrada: un grafo simple $G = (V, E)$ y un orden $v_1, \ldots, v_n$ de sus vértices.

Salida: un coloreo válido c de G.

Para $i = 1, \ldots, n$:

$F \leftarrow \{c(v_j) : j < i \text{ y } v_j v_i \in E\}$.

$c(v_i) \leftarrow \min(\mathbb{N} \setminus F)$.

Devolver c.

- **Obs:** no es óptimo.
- Pero tenemos una **garantía**.

Una cota para colorear

- Acotemos los colores usados a partir de los grados.

Teo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no vacío, con grado máximo

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v).$$

El algoritmo de coloreo avaro obtiene un coloreo válido usando a lo más $\Delta(G) + 1$ colores. En particular,

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

- **Dem:**

Conjuntos independientes y particiones

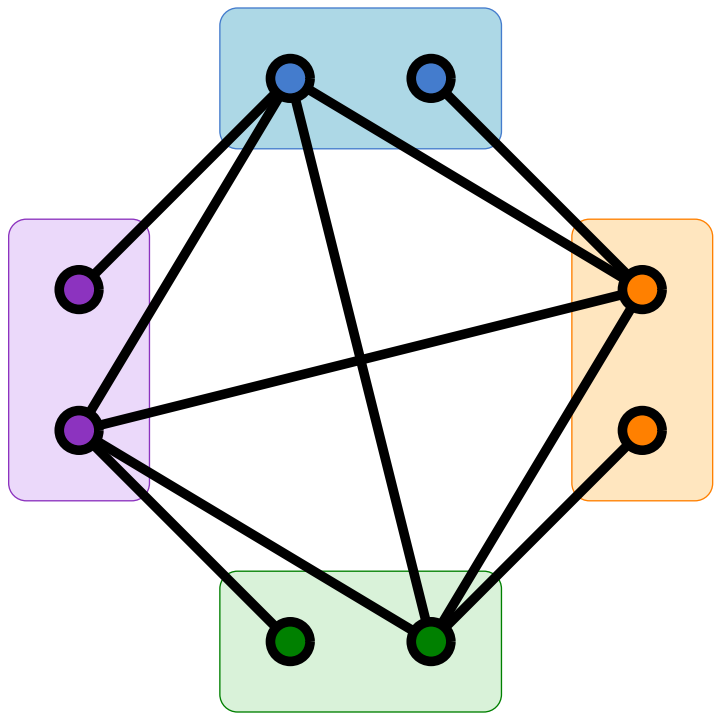
Conjuntos sin conflictos

- Aristas $\leftarrow$ conflictos
  - ¿Conjunto sin conflictos?

Def.

Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Un conjunto $I \subseteq V$ es *independiente* si no hay una arista de G entre dos vértices de I.



Grafos partitos

- Visión alternativa a coloreo.

Def.

Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $k \in \mathbb{N}$.

Diremos que G es *k-partito* si existen conjuntos independientes $V_1, \ldots, V_k$ de G llamados *partes* tales que:

1. $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, y
2. $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

La familia $(V_1, \ldots, V_k)$ se llama una *k-partición* de G.

- **Equivalente** a colorear.

Prop.

Sea G un grafo simple y sea $k \in \mathbb{N}$.

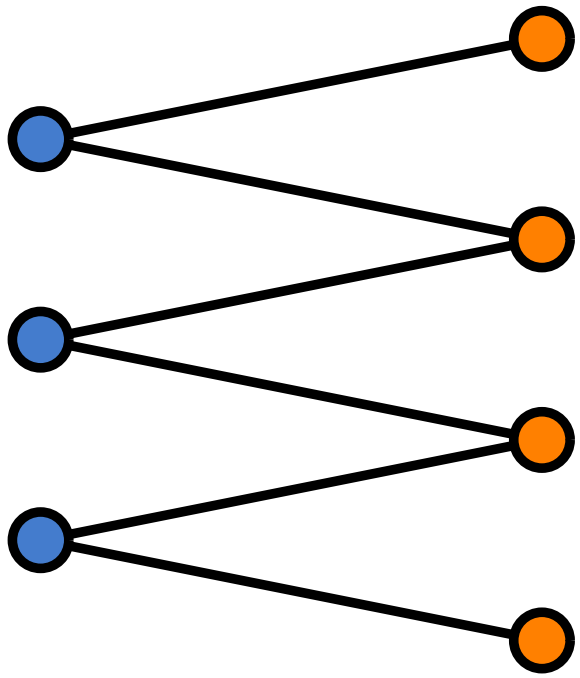
G es k-coloreable si y sólo si es k-partito.

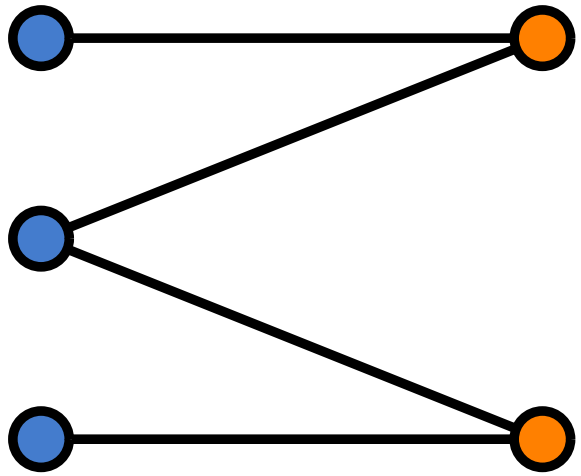
- **Dem:**

Modelos bipartitos

- Grafos k-partitos aparecen al **modelar** objetos de k tipos distintos.
- Especial interés $k = 2$: grafos *bipartitos*.
- **Ej:**

Compradores Bienes Tareas Máquinas





- ¿Qué representa una arista en cada modelo?

Grafos bipartitos completos

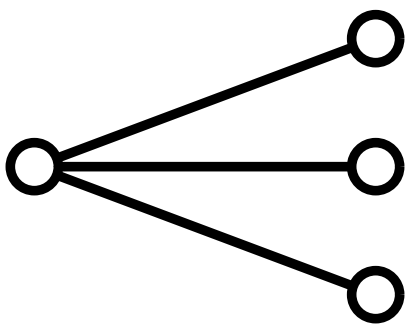
- Veamos una familia de grafos bipartitos emblemáticos.

Def.

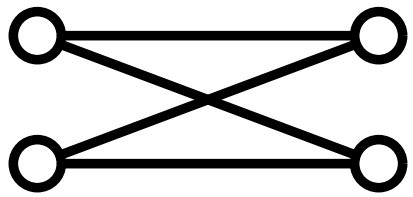
Sean $\ell, r \in \mathbb{N}$.

El *grafo bipartito completo* $K_{\ell,r}$ tiene partes L y R, con $|L| = \ell$ y $|R| = r$, y cada vértice de L es adyacente a cada vértice de R.

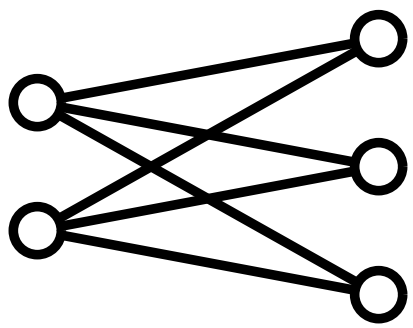
- **Ej:**



$K_{1,3}$



$K_{2,2}$

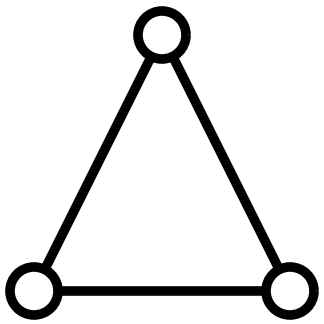


$K_{2,3}$

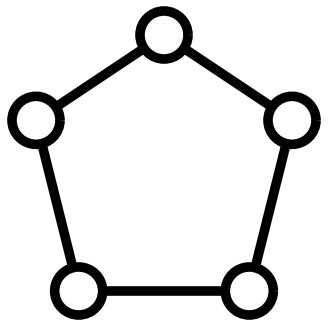
Ciclos impares y bipartición

- ¿Qué impide que un grafo sea bipartito?

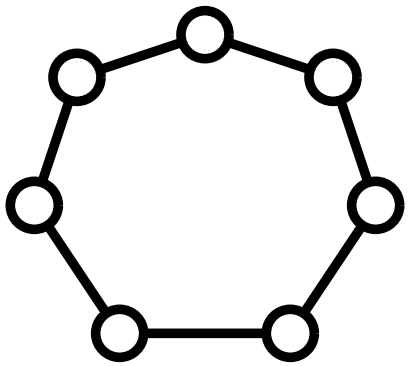
- **Ej:**



C_3



C_5



C_7

Teo.

Sea G un grafo.

G es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de largo impar.

- **Dem:**

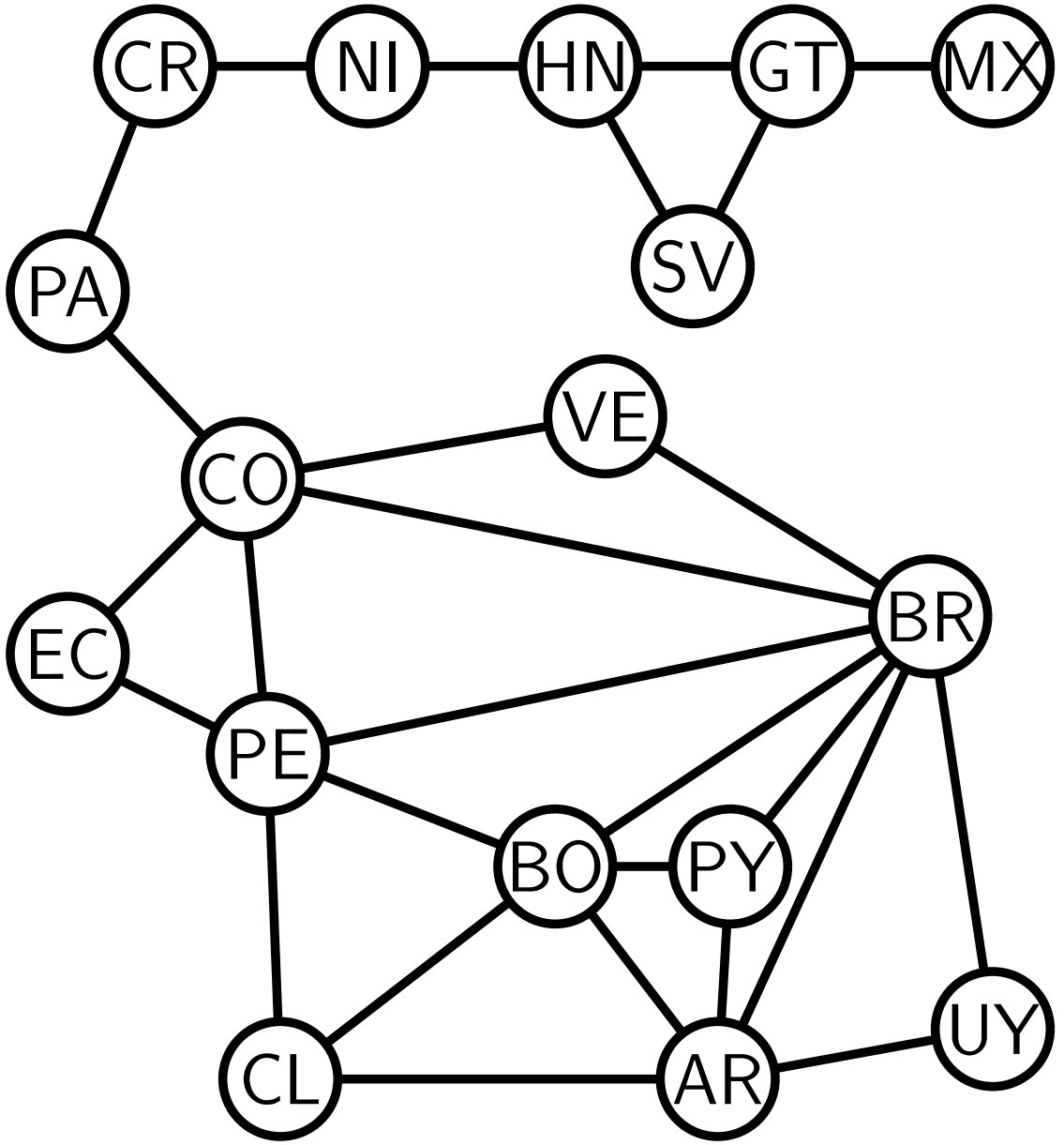
Mapas y planaridad

Mapas

- Estudiemos los grafos que aparecen al modelar mapas.

- **Ej:** América Latina continental y sus fronteras.





- ¿Cómo elegimos colores para países vecinos?

Grafos planares

- Estos grafos se pueden dibujar sin cruces.

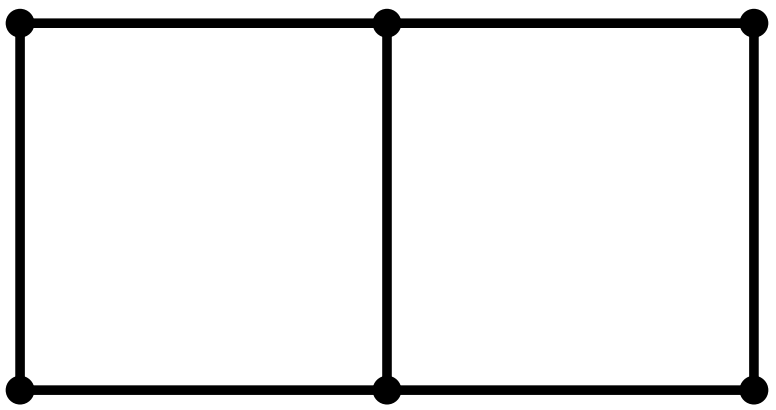
Def.

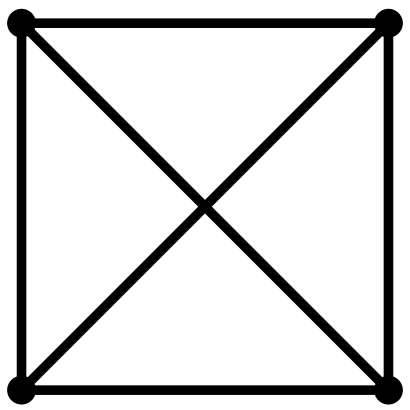
Sea G un grafo simple.

G es *planar* si se puede dibujar en el plano de modo que sus aristas no se crucen, salvo en vértices comunes.

A un dibujo con esta propiedad lo llamamos una *representación planar* de G.

- **Ej:**





Regiones de una representación planar

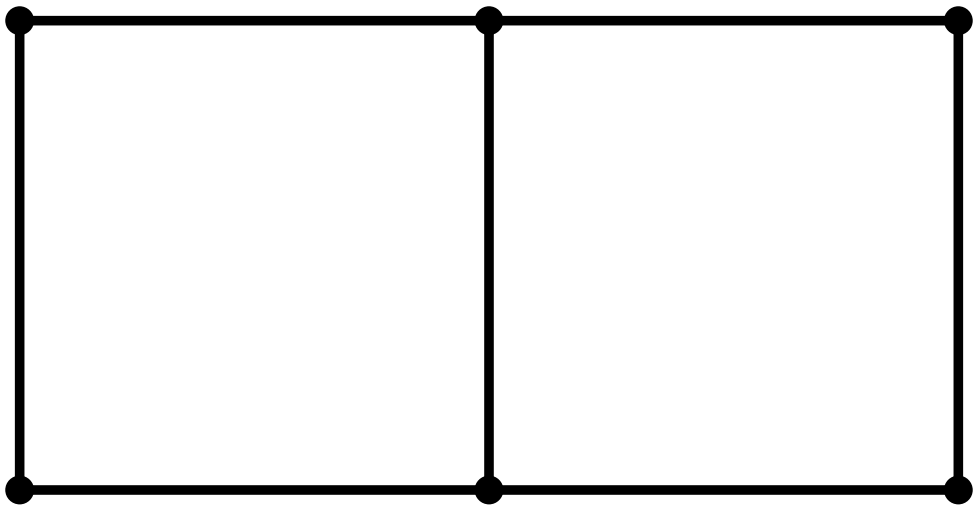
- Nuevo objeto: regiones.

Def.

Sea G un grafo conexo con una representación planar fija.

El dibujo divide el plano en *regiones*, también llamadas caras.

La región no acotada, que queda "afuera" del dibujo, también cuenta como región.



- ¿Cuántas regiones tiene este dibujo?

Largo de frontera

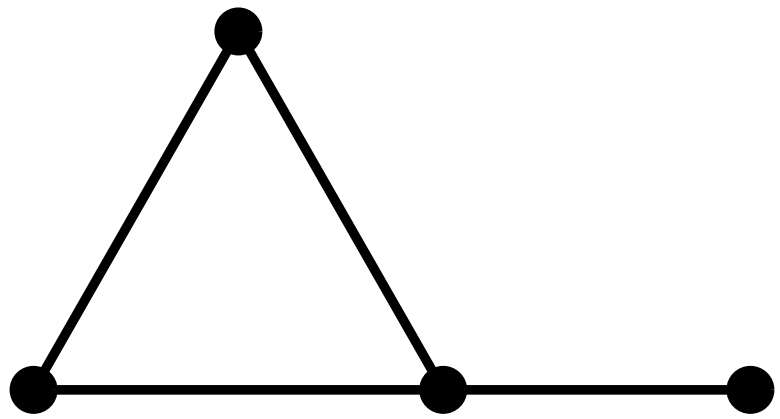
Def.

Sea G un grafo conexo con una representación planar fija.

El *largo de frontera* de una región R, denotado $\ell(R)$, es la cantidad de aristas que aparecen al recorrer su frontera, contadas con multiplicidad.

Si una arista tiene la misma región a ambos lados, se cuenta dos veces.

- **Ej:** ¿Cuánto mide la frontera de cada región?



Apretón de manos para regiones

- Las regiones tienen dos propiedades **claves**.

Lem.

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, conexo y planar con una representación planar fija.

$$\sum_{R} \ell(R) = 2|E|.$$

- **Dem:**

Teo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no vacío, conexo y planar.

Si r es el número de regiones de una representación planar de G, entonces

$$|V| - |E| + r = 2.$$

- **Dem:**

Propiedades de los grafos planares

- Tenemos dos consecuencias de los resultados anteriores

Cor.

Sea G un grafo simple, conexo y planar con $n \geq 3$ vértices y m aristas.

$$m \leq 3n - 6.$$

- **Dem:**

- ¿Qué nos dice esta cota sobre los grados?

Lem.

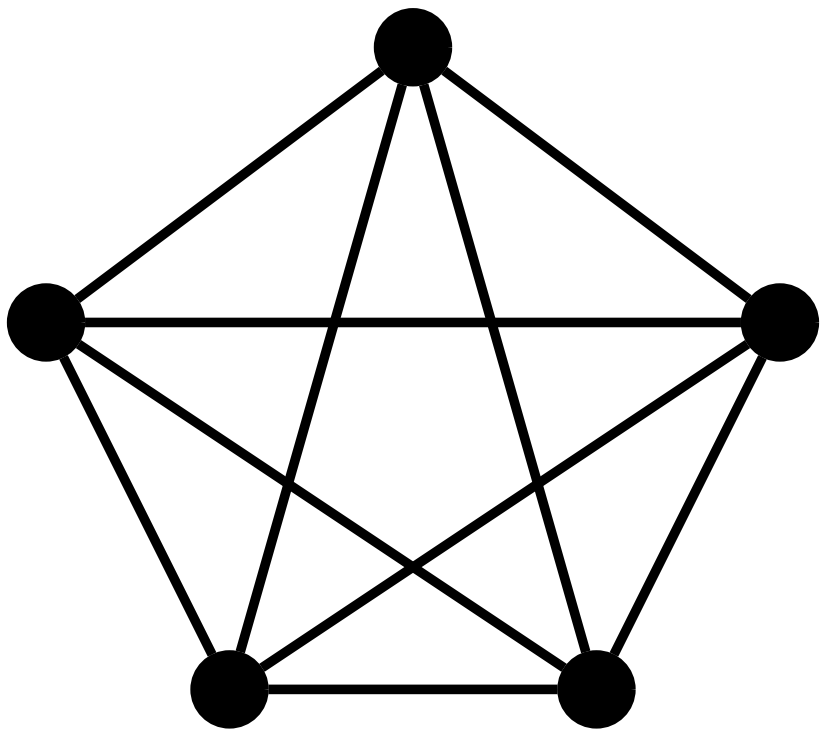
Sea G un grafo simple planar no vacío.

G tiene un vértice de grado a lo más 5.

- **Dem:**

Descartar planaridad

- ¿Argumentar que un grafo no es planar?
- **Ej:** ¿Es planar el grafo K_5?



Seis colores

Seis y cuatro colores

- Los grafos planares se pueden colorear con constantes colores.

Teo.

Sea G un grafo simple planar.

$$\chi(G) \leq 6.$$

- **Dem:**

- **Teorema de los cuatro colores**

Teo.

Sea G un grafo simple planar.

$$\chi(G) \leq 4.$$

- Demostración incorrecta de Alfred Kempe (1879-1890)
- Demostración **asistida por computador** de Appel y Haken (1976)

Dudas