Recorridos en grafos



UNIVERSIDAD DE CHILE

Arturo Merino



Plan

Recuerdo y plan

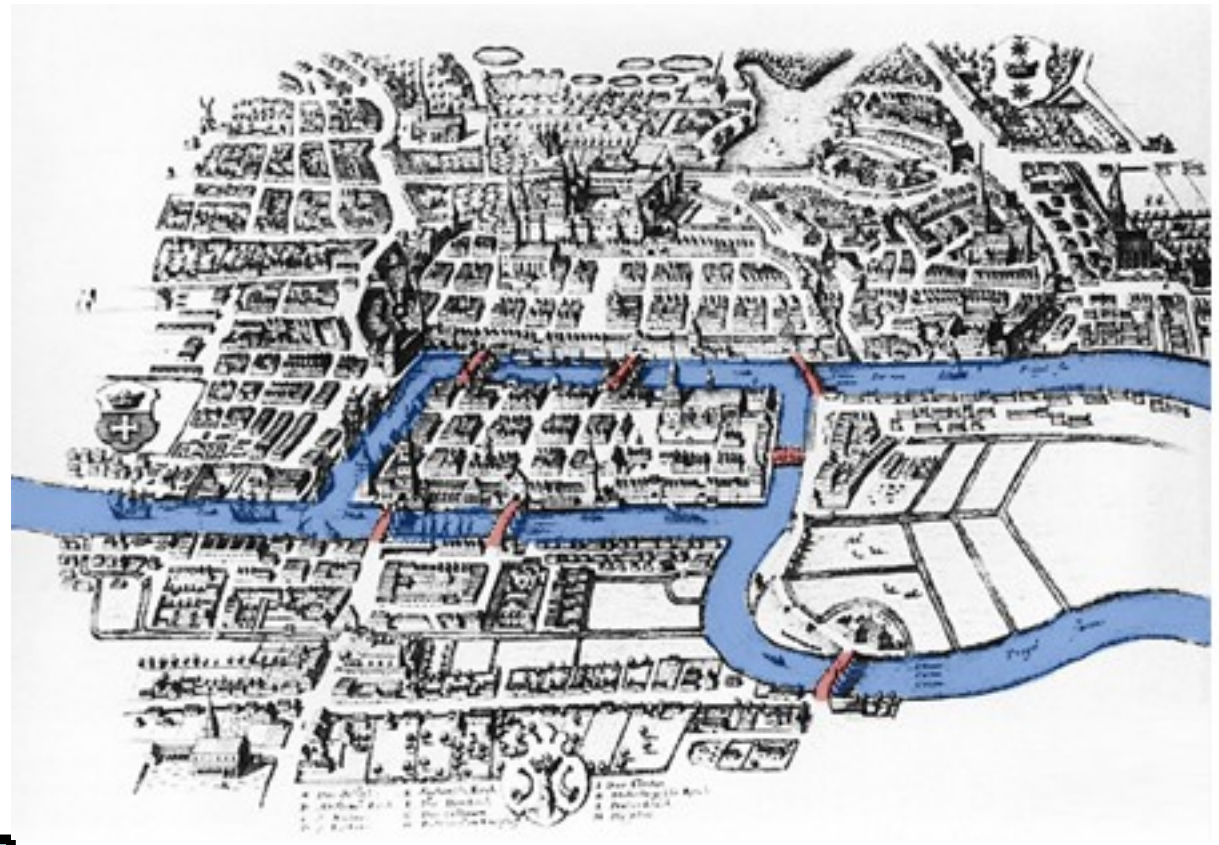
- **Recuerdo:**
  - árboles generadores
  - caminos más cortos
  - coloreos

- **Plan:**
  - grafos Eulerianos
  - grafos Hamiltonianos

Grafos Eulerianos

Grafos Eulerianos

- Origen de la teoría de grafos:





Def.

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo.

Un *camino euleriano* de G es un recorrido que usa cada arista de G exactamente una vez.

Un *circuito euleriano* de G es un camino euleriano que empieza y termina en el mismo vértice.

Grafos Eulerianos

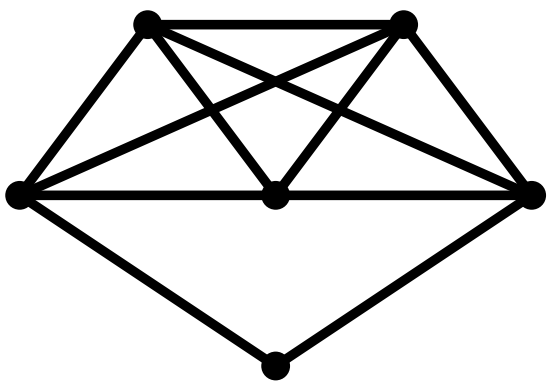
Def.

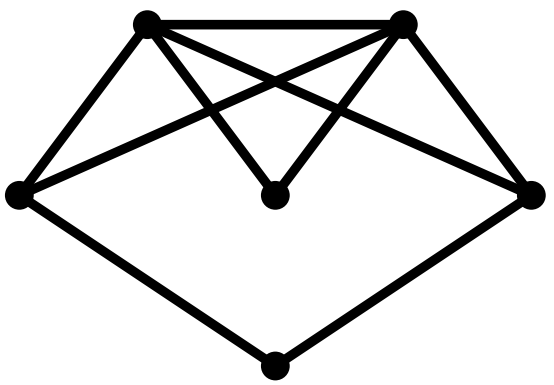
Sea $G = (V, E)$ un multigrafo.

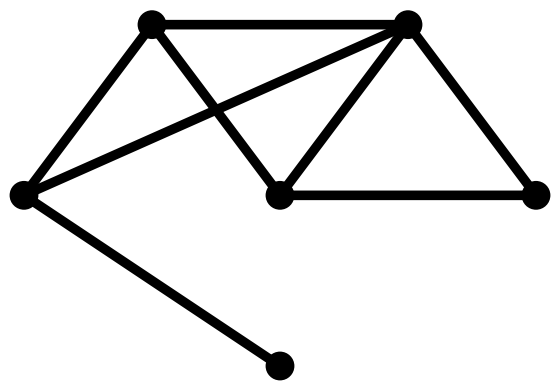
Un *camino euleriano* de G es un recorrido que usa cada arista de G exactamente una vez.

Un *circuito euleriano* de G es un camino euleriano que empieza y termina en el mismo vértice.

- **Ej:**
  - ¿Euleriano?







  - ¿Qué falla?

Argumentos de camino maximal

- Estructura más sencilla: ciclos.

Lem.

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo finito no vacío.

Si $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo.

- ¿Cómo podemos ocupar esto para encontrar ciclos Eulerianos?

Teo.

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo no vacío.

G tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

- ¡Nos da un algoritmo!

Algoritmo

Alg.

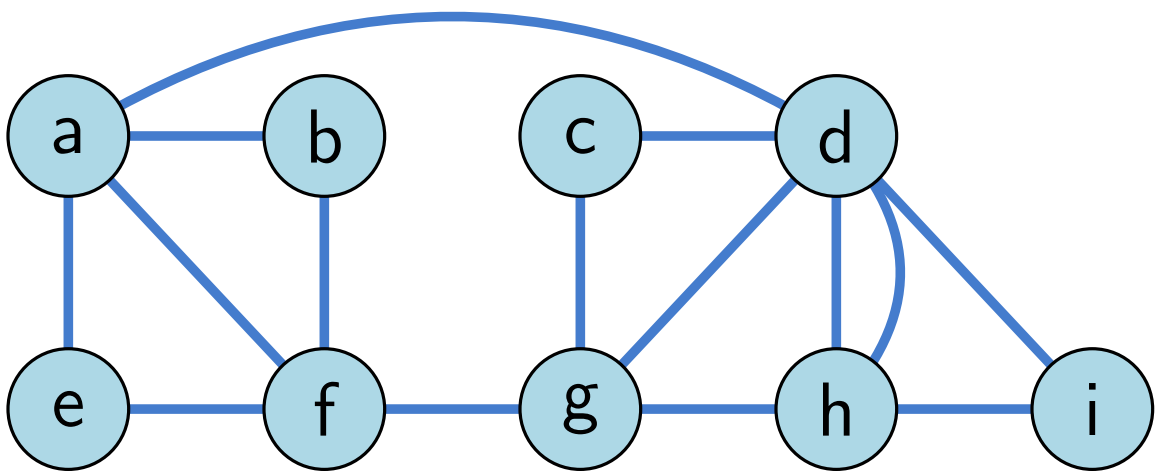
Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo con todos sus grados pares.

Encontrar un ciclo, borrarlo.

Recursivamente, resolver en las componentes conexas.

Insertar la solución en el ciclo original.

- **Ej:**
  - Ciclo euleriano: $a, b, f, e, a, f, g, h, d, i, h, d, c, g, d, a$.



$$C_0 = (a, f, g, d, a)$$

$$C_1 = (a, b, f, e, a)$$

$$C_2 = (d, c, g, h, d)$$

$$C_3 = (d, i, h, d)$$

$$C_R = (g, h, d, i, h, d, c, g)$$

Caminos Eulerianos

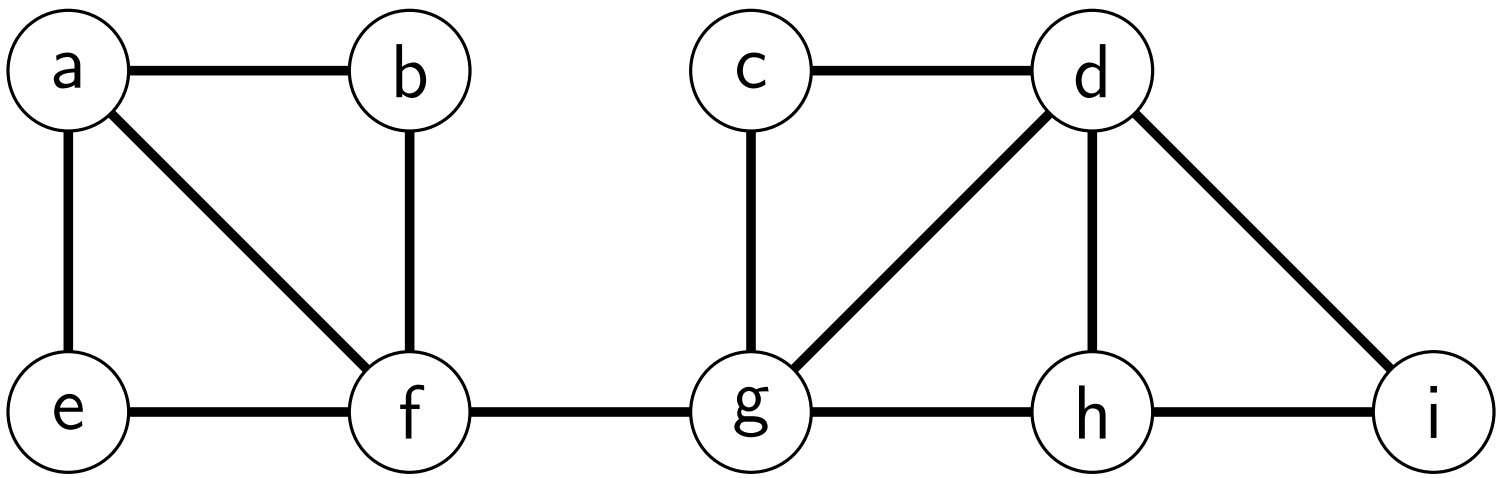
- ¿Reducción?

Teo.

Sea $G = (V, E)$ un multigrafo conexo.

G tiene un camino euleriano (que no es circuito) si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

- **Ej:**
  - ¿Camino?



Caso dirigido

- Estructura más sencilla: diciclos.

Lem.

Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo finito no vacío.

Si $d^+(v) \geq 1$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un diciclo.

- ¿Cómo podemos ocupar esto para encontrar ciclos Eulerianos?

Teo.

Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo no vacío sin vértices aislados.

G tiene un circuito euleriano si y sólo si

- G es débilmente conexo, y
- para todo vértice v se cumple $d^-(v) = d^+(v)$.

- ¡Nos da un algoritmo!

Algoritmo dirigido

Alg.

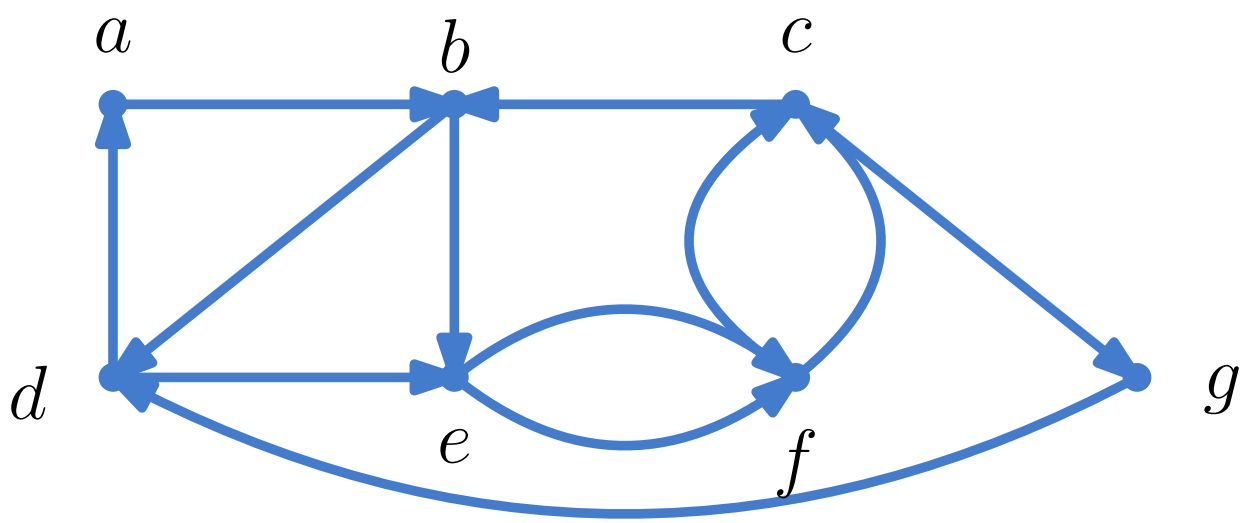
Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo débilmente conexo, sin vértices aislados, con $d^-(v) = d^+(v)$ para todo $v \in V$.

Encontrar un ciclo, borrarlo.

Recursivamente, resolver en las componentes débilmente conexas.

Insertar la solución en el ciclo original.

- **Ej:**
  - Ciclo euleriano: $d, e, f, c, b, e, f, c, g, d, a, b, d$.



$$C_0 = (d, a, b, d)$$

$$C_1 = (d, e, f, c, g, d)$$

$$C_2 = (c, b, e, f, c)$$

$$C_R = (d, e, f, c, b, e, f, c, g, d)$$

Caminos Eulerianos - reducción dirigida

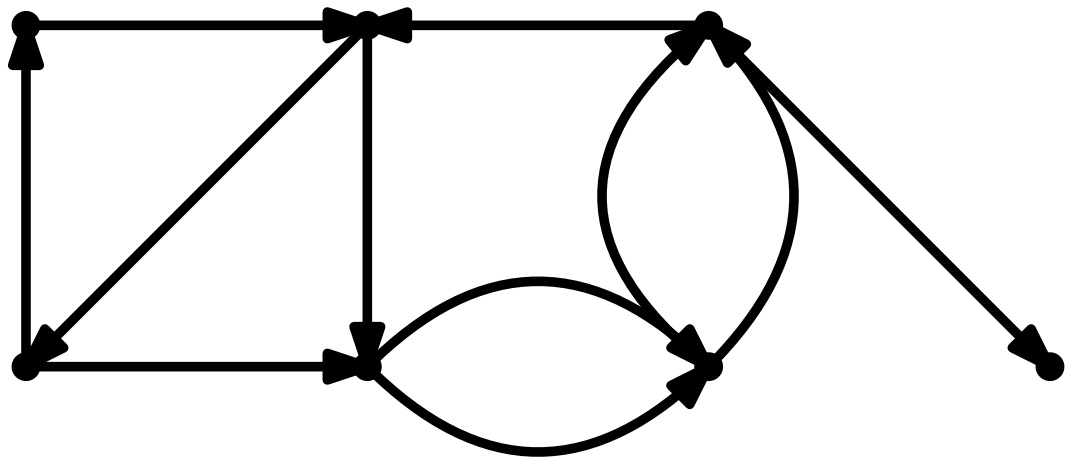
Teo.

Sea $G = (V, E)$ un multidigrafo sin vértices aislados.

G tiene un camino euleriano dirigido (que no es circuito) si y sólo si

- G es débilmente conexo,
- Existen dos vértices s, t tales que $d^+(s) = d^-(s) + 1$ y $d^-(t) = d^+(t) + 1$
- para todo vértice $v \neq s, t$ se cumple $d^-(v) = d^+(v)$.

- **Ej:**
  - ¿Camino?



Grafos Hamiltonianos

Hamiltoniano

- ¿Vértices en vez de aristas?

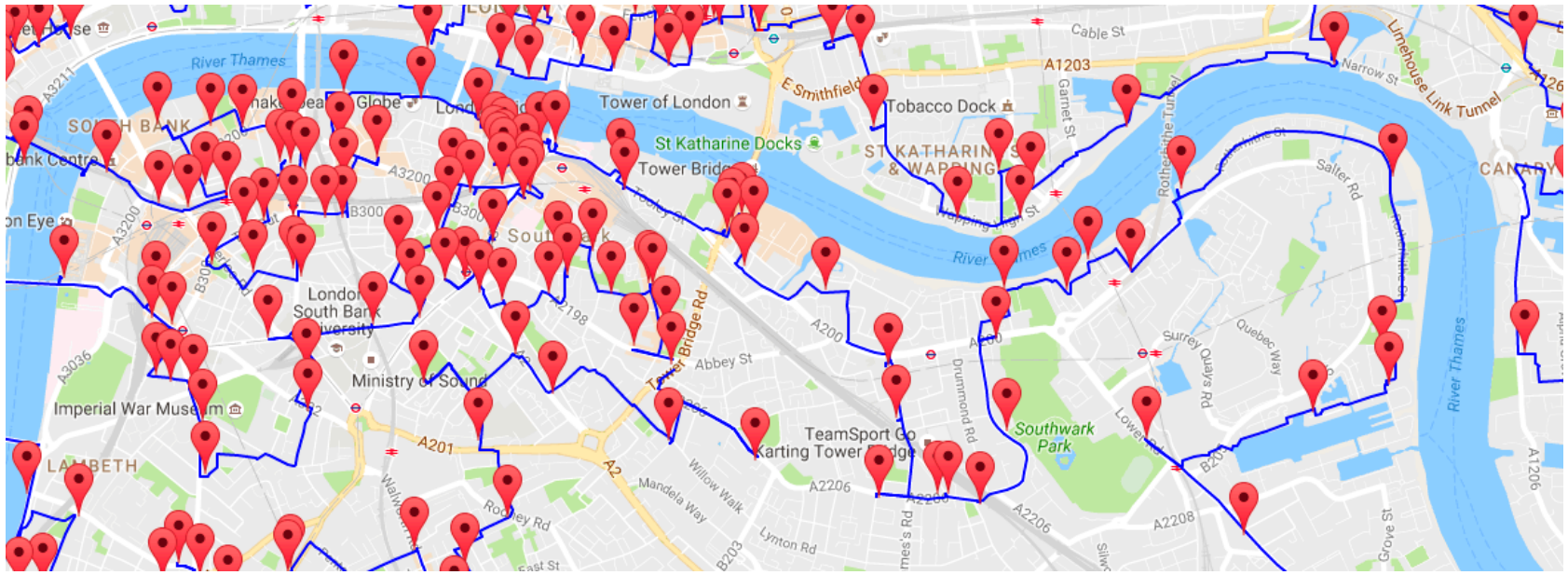
Def.

Sea $G = (V, E)$ un grafo.

Un *camino Hamiltoniano* de G es un camino que usa cada vértice de G exactamente una vez.

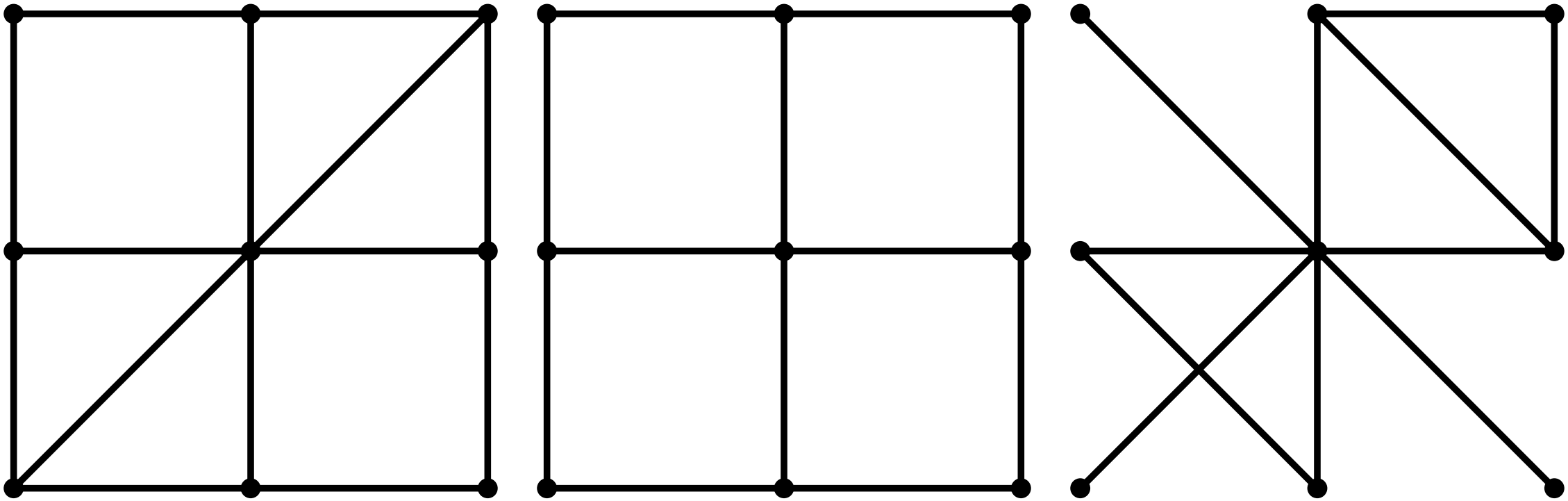
Un *ciclo Hamiltoniano* de G es un ciclo que usa cada vértice de G exactamente una vez.

- Muchísimo más difícil, relación con Travelling Salesperson Problem



Hamiltoniano

- **Ej:**
  - ¿Hamiltoniano?



  - No es tan fácil argumentar por qué o por qué no

Condiciones

- Condición suficiente: densidad.

Teo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $n \geq 3$ vértices.

Si $d(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo Hamiltoniano.

- ¿Condición necesaria?
- ¿Vértices de grado 1?

Prop.

Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito con bipartición (L, R).

Si $|L| \neq |R|$, entonces G no tiene ciclo Hamiltoniano.

- ¿Cuándo tiene $K_{\ell,r}$ ciclo Hamiltoniano?

Dudas/Preguntas