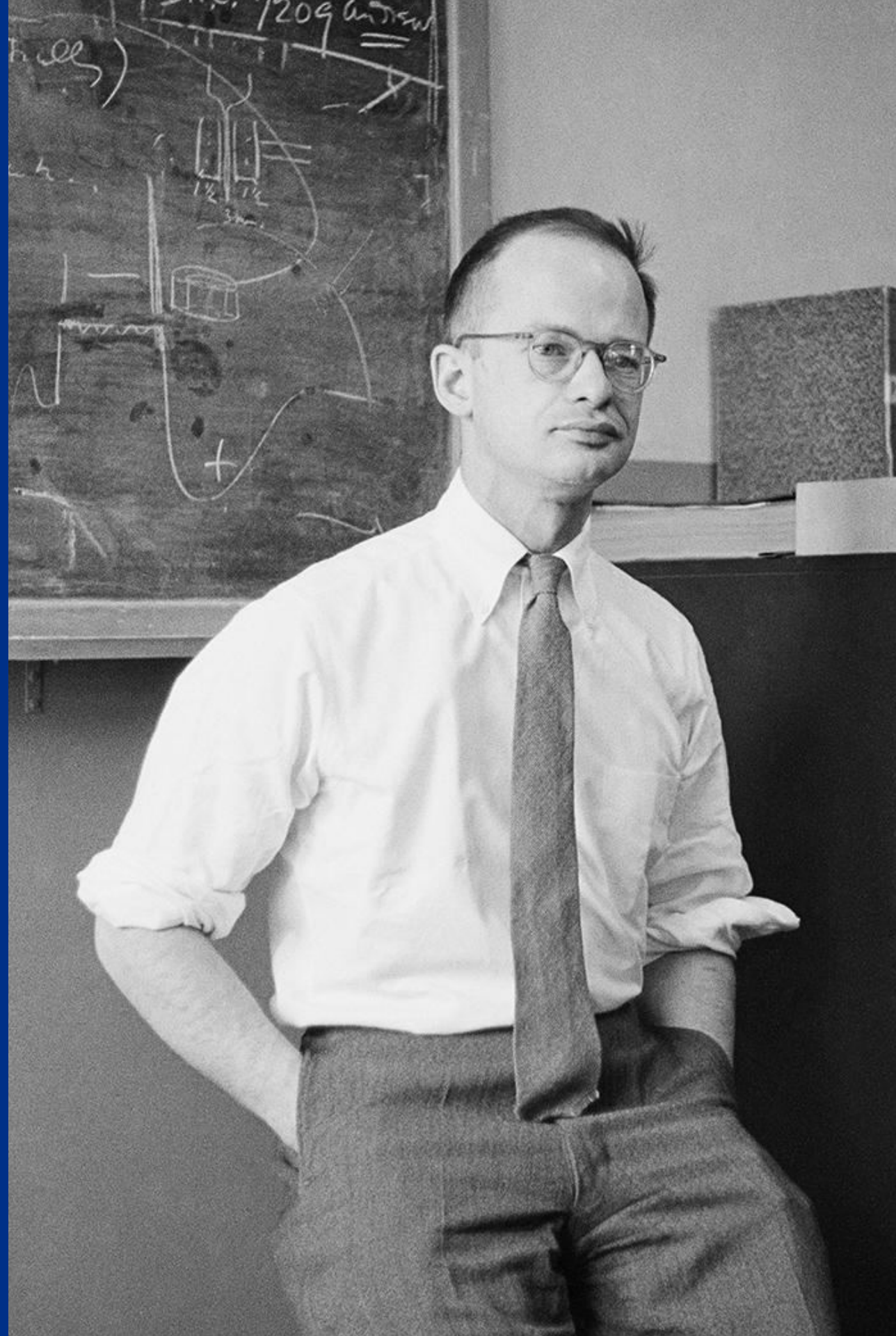
Autómatas finitos



UNIVERSIDAD DE CHILE

Arturo Merino

Recuerdo / Plan

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
  - Lenguajes formales

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
  - Lenguajes formales

- **Plan:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
  - Lenguajes formales

- **Plan:**
  - Autómatas finitos

Autómatas finitos

Autómatas

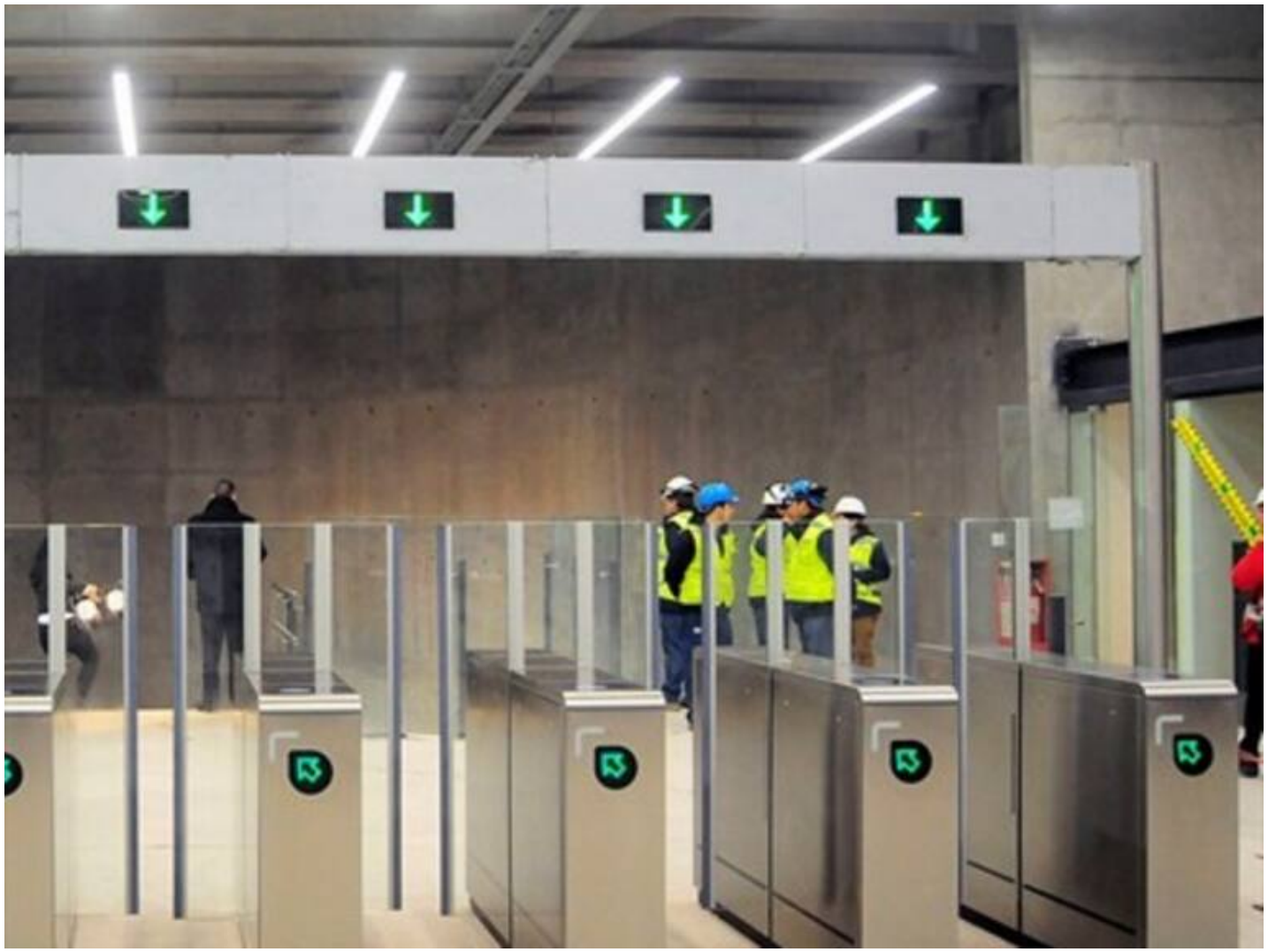
- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.

Autómatas

- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.
- ¿Qué podemos hacer sin memoria?

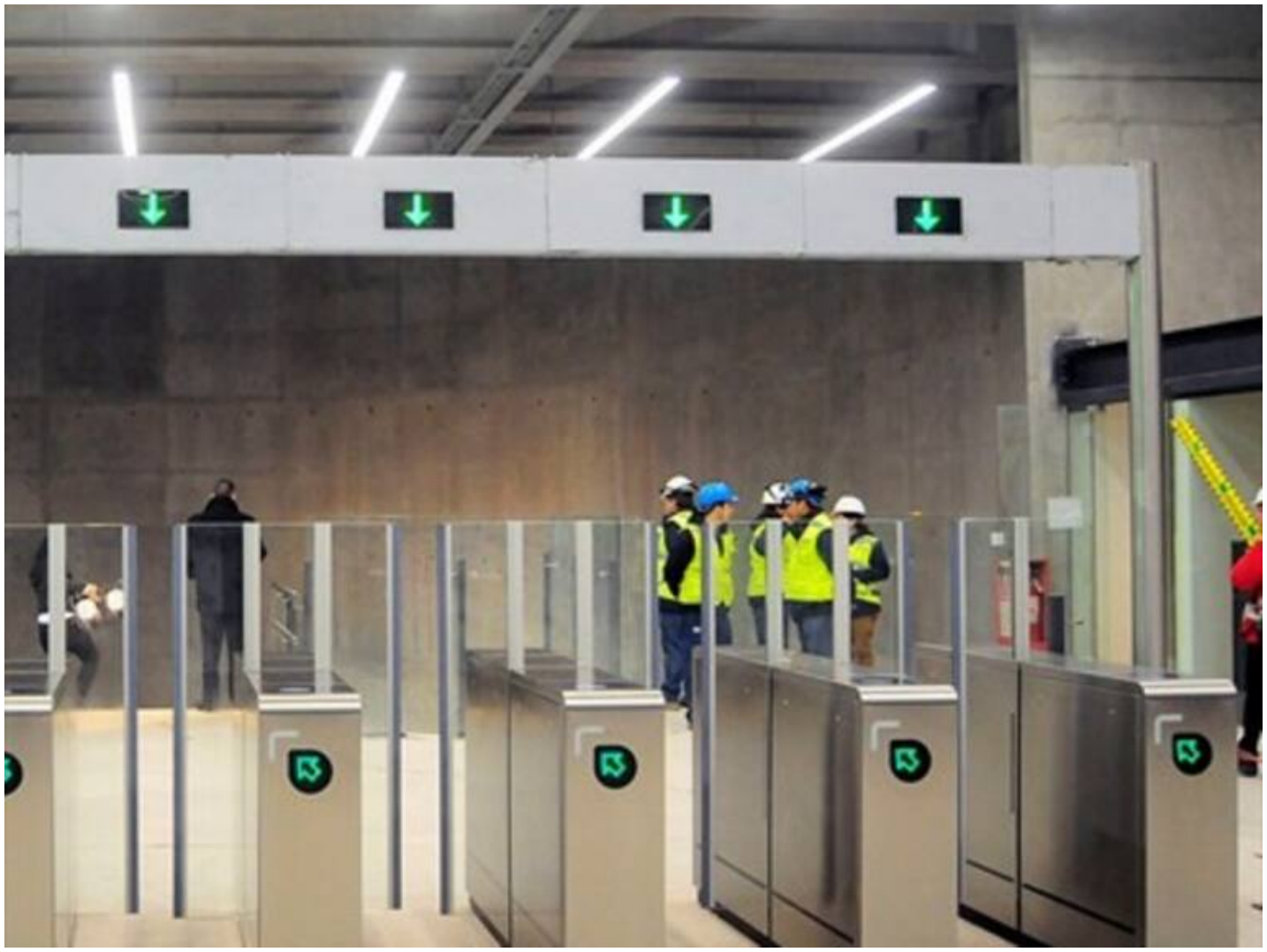
Autómatas

- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.
- ¿Qué podemos hacer sin memoria?
- Varias cosas



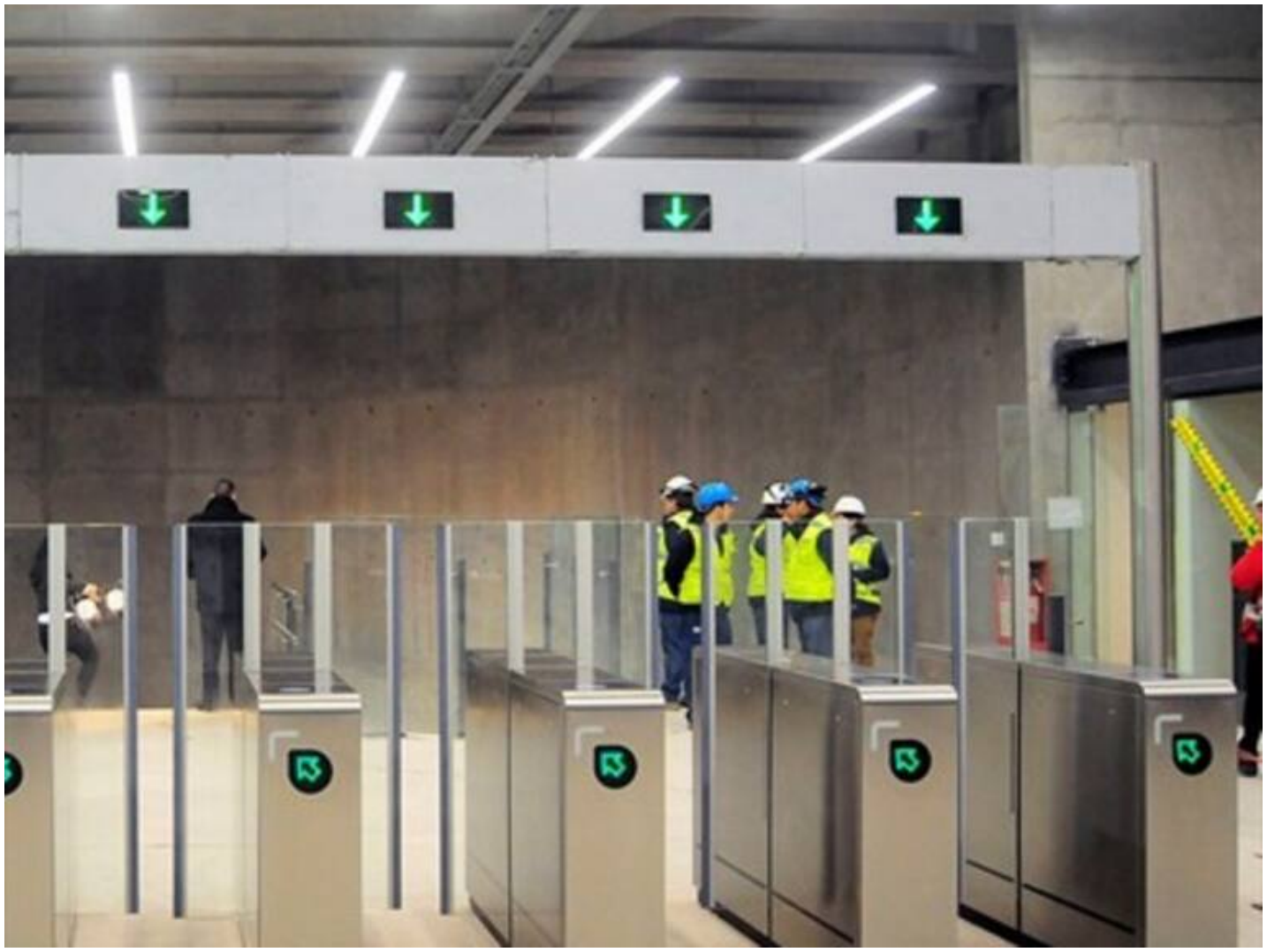
Autómatas

- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.
- ¿Qué podemos hacer sin memoria?
- Varias cosas
  - Sensor BIP



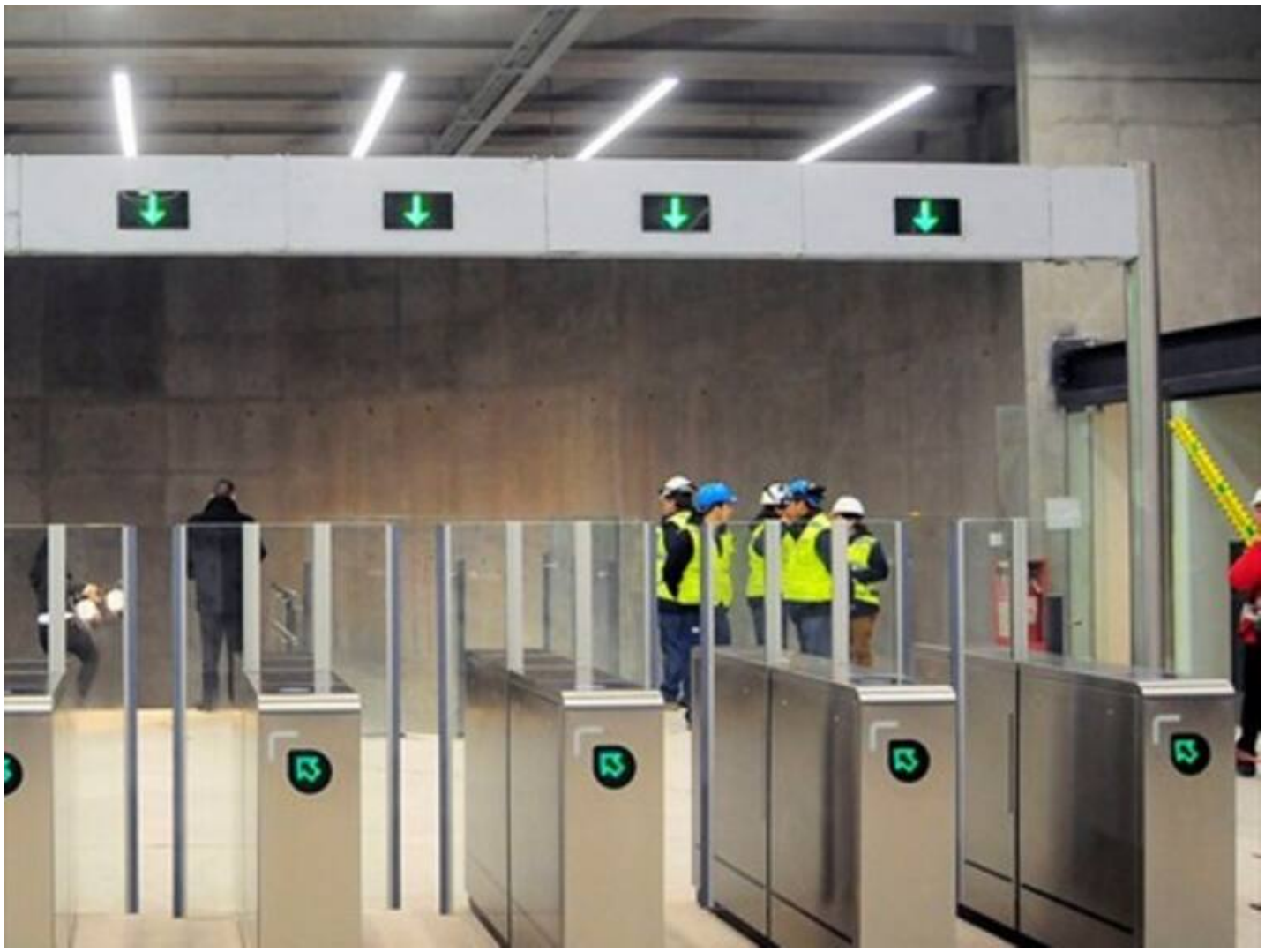
Autómatas

- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.
- ¿Qué podemos hacer sin memoria?
- Varias cosas
  - Sensor BIP
  - Sensor cruce



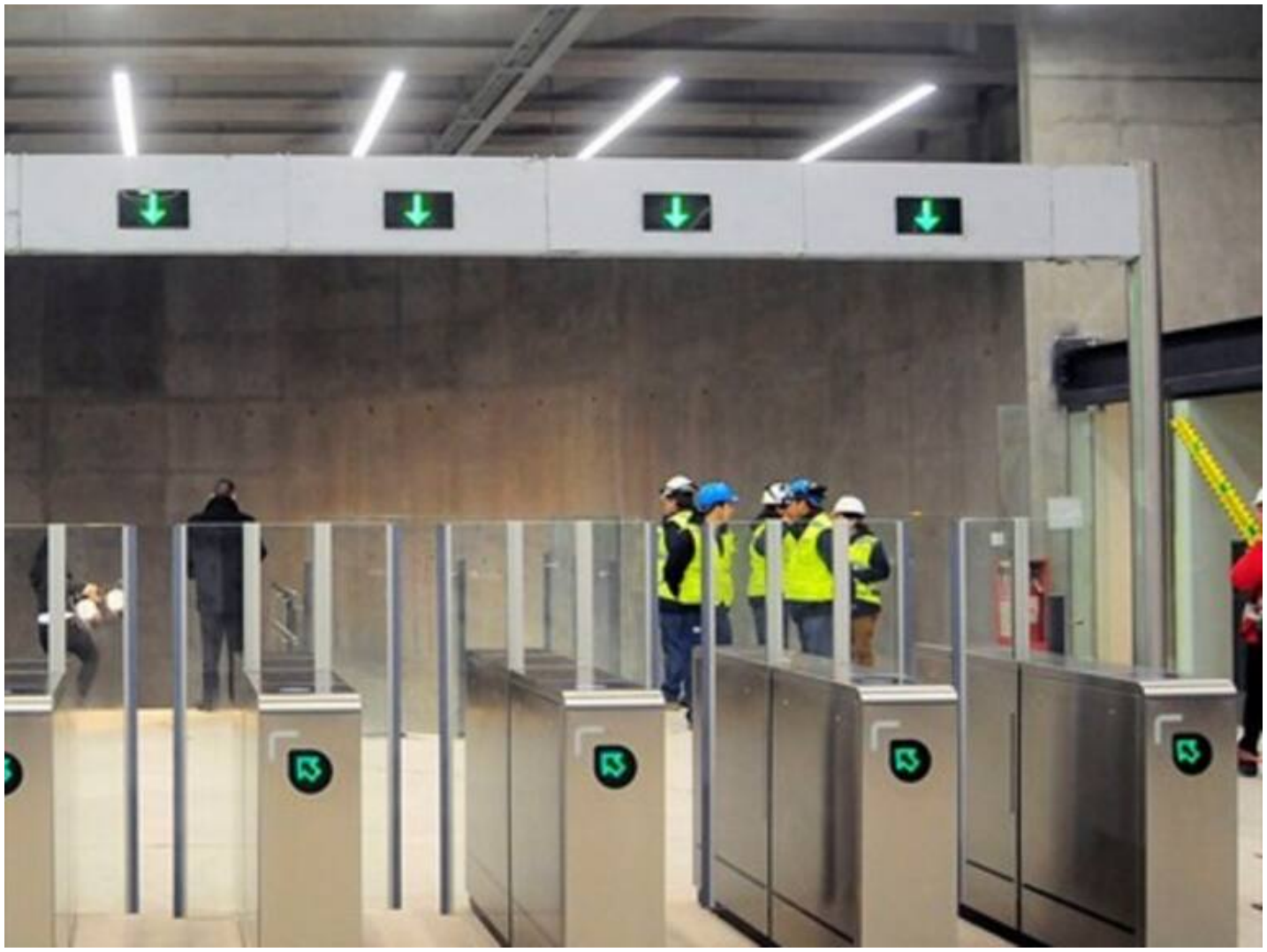
Autómatas

- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.
- ¿Qué podemos hacer sin memoria?
- Varias cosas
  - Sensor BIP
  - Sensor cruce
  - ¿Estados?



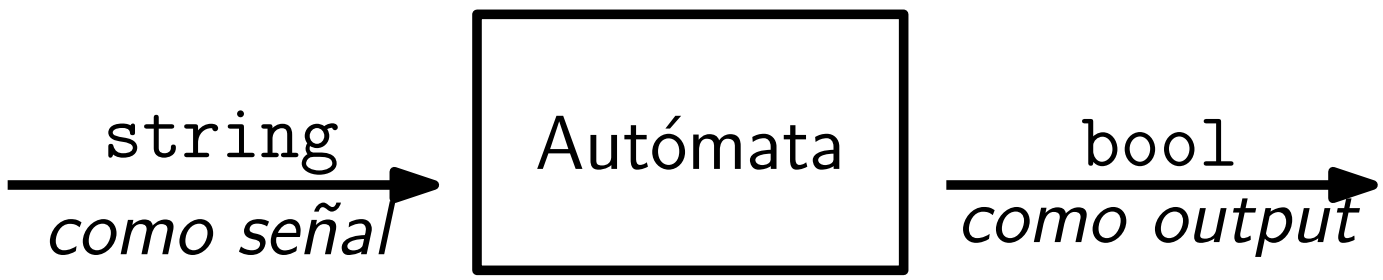
Autómatas

- **Entender** el poder de máquinas “sin” memoria.
- ¿Qué podemos hacer sin memoria?
- Varias cosas
  - Sensor BIP
  - Sensor cruce
  - ¿Estados?
  - ¿Dinámica?



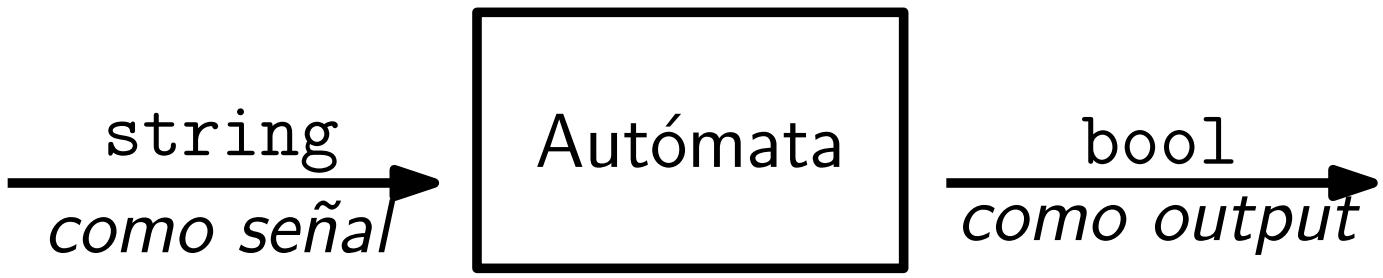
Problemas de decisión

- Nuestro interés: `string`$\to$`bool`.



Problemas de decisión

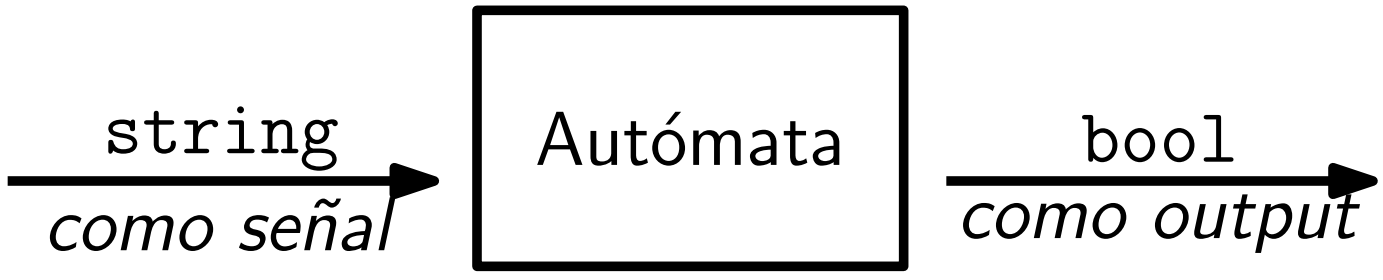
- Nuestro interés: `string`→`bool`.



- No recuerda el string, lo *consume*.

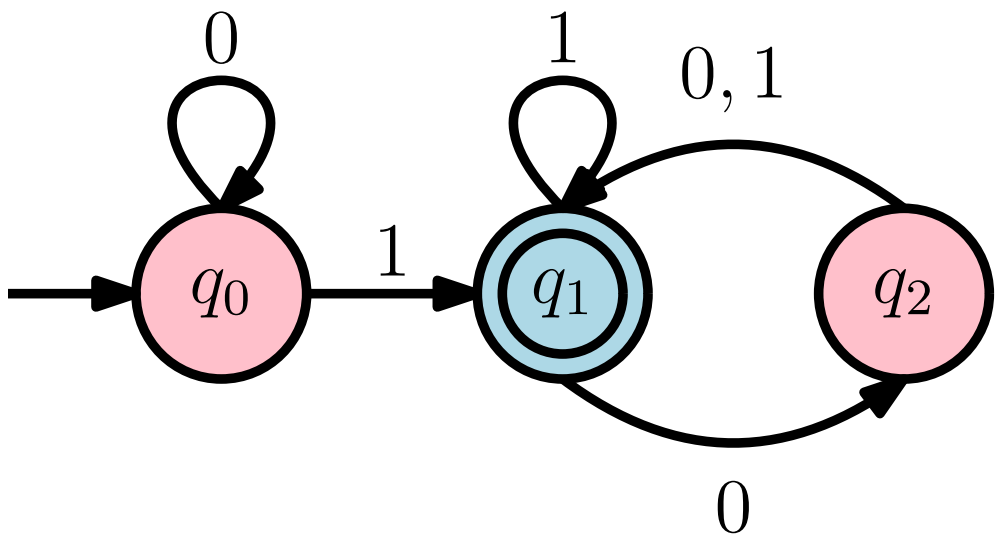
Problemas de decisión

- Nuestro interés: `string`$\to$`bool`.



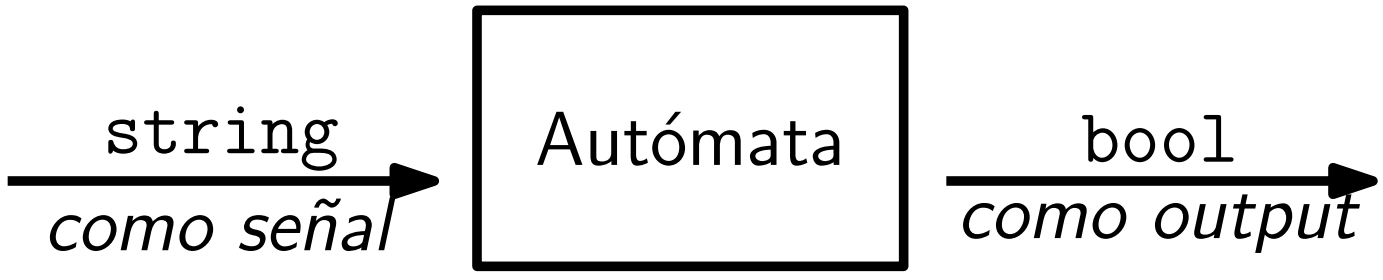
- No recuerda el string, lo *consume*.
- **Ej:**

A:

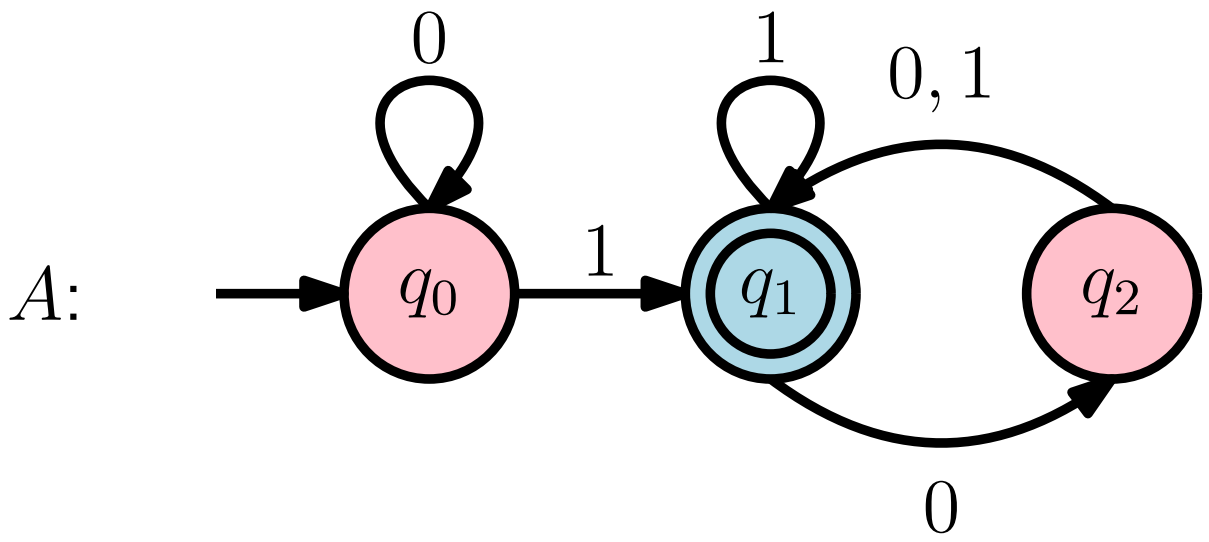


Problemas de decisión

- Nuestro interés: `string`$\to$`bool`.



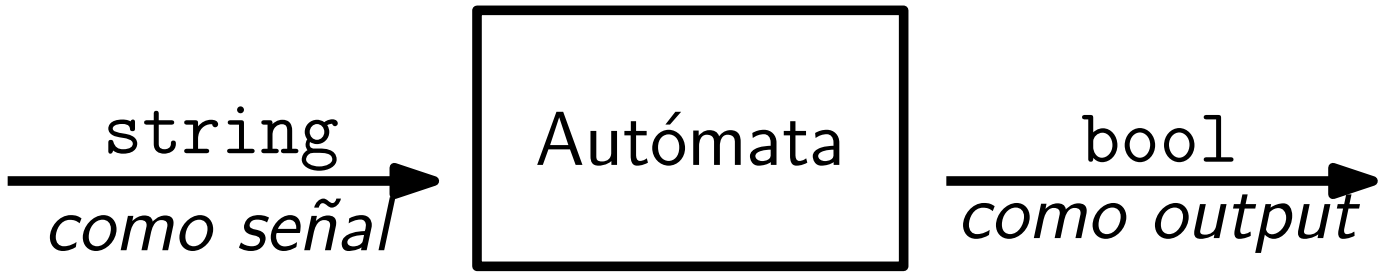
- No recuerda el string, lo *consume*.
- **Ej:**



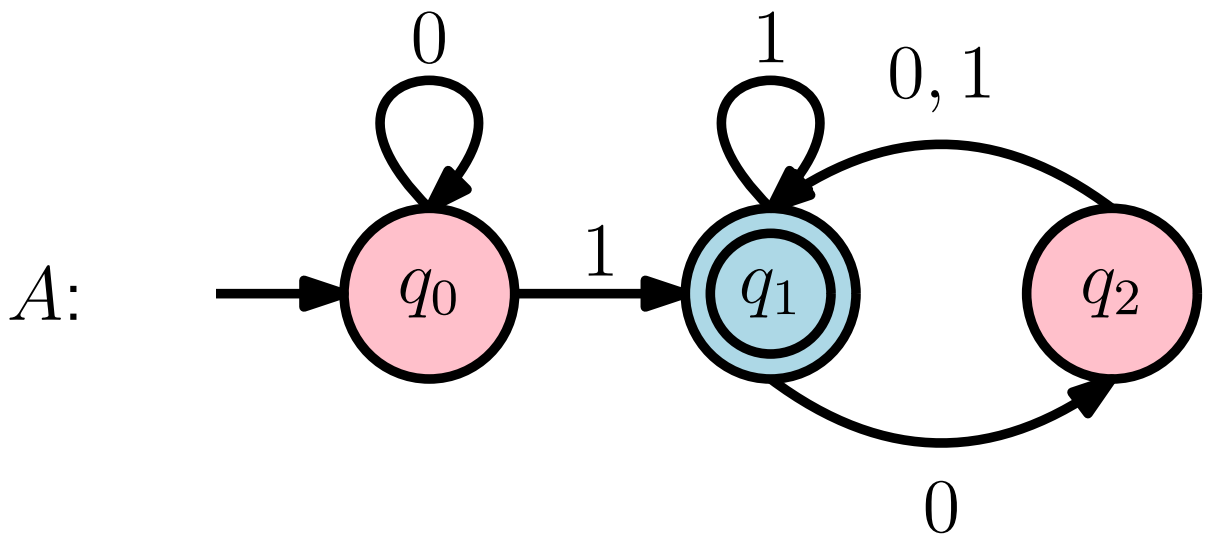
  - ¿$A(010011)$?

Problemas de decisión

- Nuestro interés: `string`$\to$`bool`.



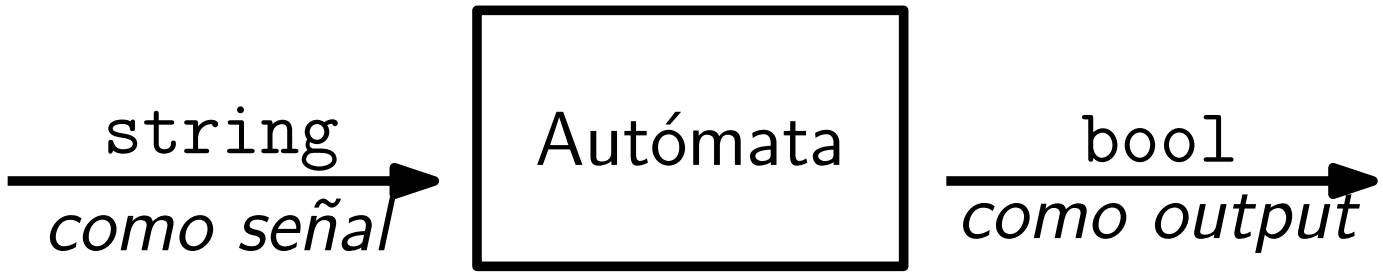
- No recuerda el string, lo *consume*.
- **Ej:**



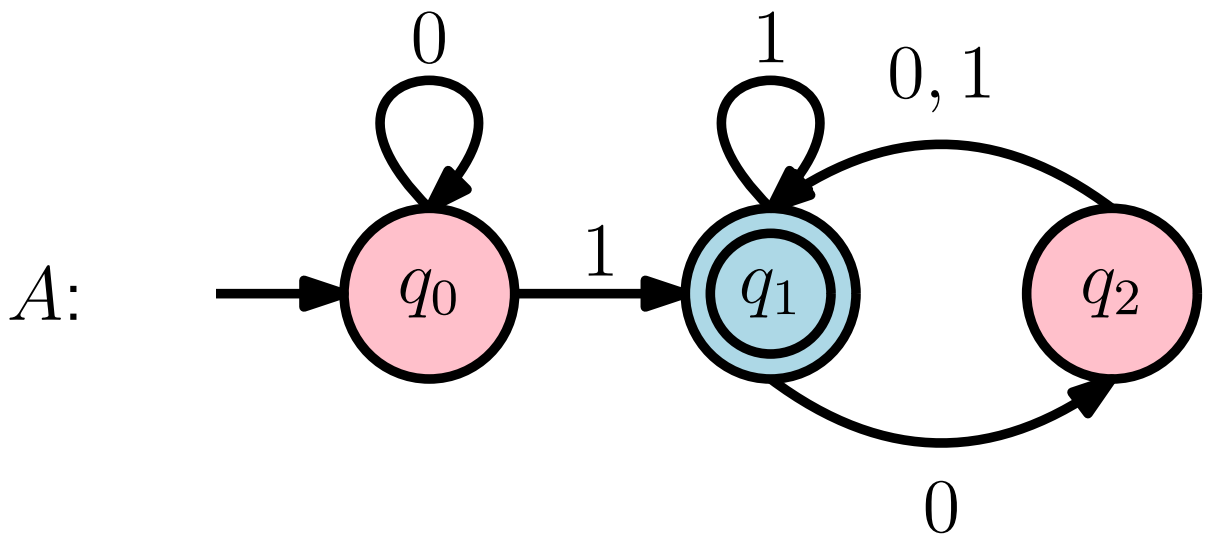
  - ¿$A(010011)$?
  - ¿$A(01111111111111111000)$?

Problemas de decisión

- Nuestro interés: `string`$\to$`bool`.



- No recuerda el string, lo *consume*.
- **Ej:**



  - ¿$A(010011)$?
  - ¿$A(01111111111111111000)$?
  - ¿$A(\varepsilon)$?

Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*

Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto*

Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto*
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ es la *función de transición*.

Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto*
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ es la *función de transición*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*, y

Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto*
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ es la *función de transición*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*, y
- $F \subseteq Q$ son los *estados de aceptación (o finales)*.

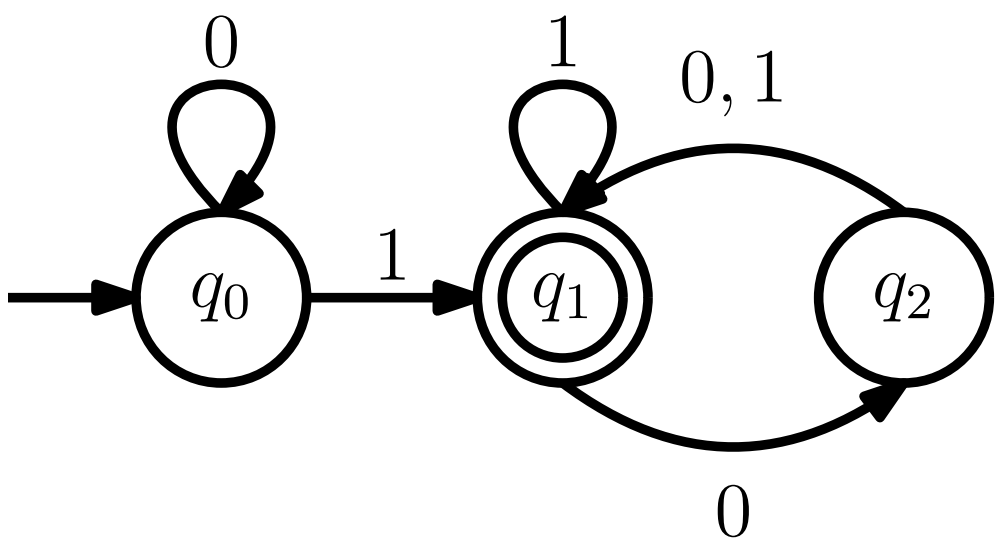
Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto*
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ es la *función de transición*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*, y
- $F \subseteq Q$ son los *estados de aceptación (o finales)*.

- **Ej:**



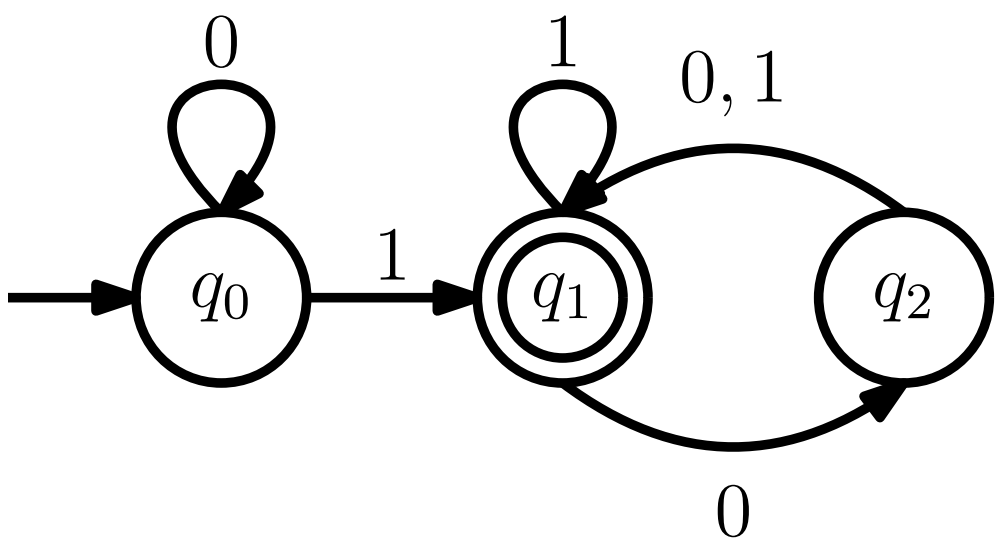
Definición formal

Def.

Un *autómata finito determinista (AFD)* es una 5-tupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de *estados*
- Σ es un conjunto finito llamado *alfabeto*
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ es la *función de transición*.
- $q_0 \in Q$ es el *estado inicial*, y
- $F \subseteq Q$ son los *estados de aceptación (o finales)*.

- **Ej:**



- Usualmente descrito por el *diagrama de estados*.

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Diremos que M *acepta* w si existen estados $r_0, r_1, \dots r_n$ tal que

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Diremos que *M acepta w* si existen estados $r_0, r_1, \dots r_n$ tal que

- $r_0 = q_0$ (partimos en el estado inicial)

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Diremos que *M acepta w* si existen estados $r_0, r_1, \dots r_n$ tal que

- $r_0 = q_0$ (partimos en el estado inicial)
- $r_i = \delta(r_{i-1}, w_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (transiciones válidas)

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Diremos que *M acepta w* si existen estados $r_0, r_1, \dots r_n$ tal que

- $r_0 = q_0$ (partimos en el estado inicial)
- $r_i = \delta(r_{i-1}, w_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (transiciones válidas)
- $r_n \in F$ (terminamos en aceptación)

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Diremos que *M acepta w* si existen estados $r_0, r_1, \dots r_n$ tal que

- $r_0 = q_0$ (partimos en el estado inicial)
- $r_i = \delta(r_{i-1}, w_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (transiciones válidas)
- $r_n \in F$ (terminamos en aceptación)

- **Not:** Usaremos $M(w) = 1$ y $M(w) = 0$ para decir si/no acepta.

Computación

- Formalicemos nuestra idea informal de computación

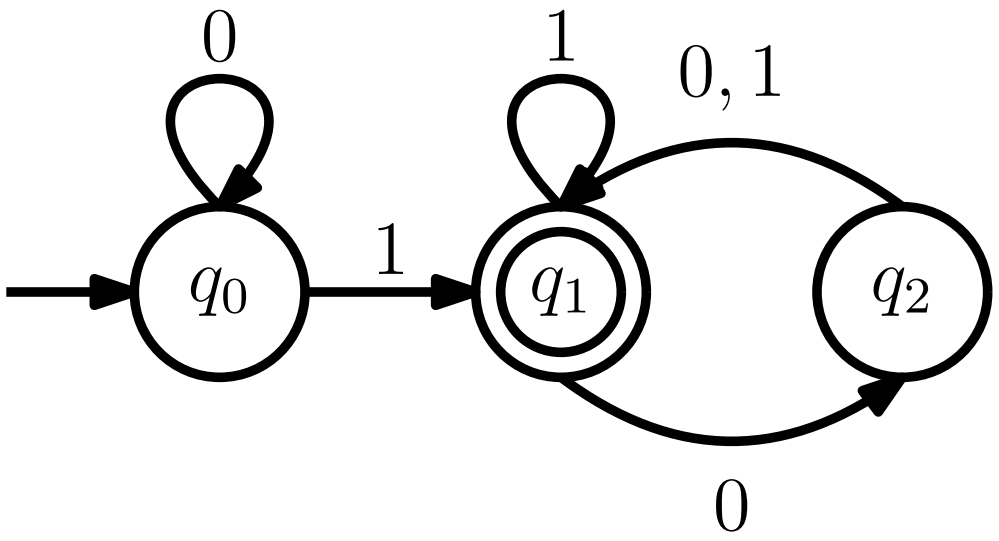
Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD y $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ un string.

Diremos que *M acepta w* si existen estados $r_0, r_1, \dots r_n$ tal que

- $r_0 = q_0$ (partimos en el estado inicial)
- $r_i = \delta(r_{i-1}, w_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (transiciones válidas)
- $r_n \in F$ (terminamos en aceptación)

- **Not:** Usaremos $M(w) = 1$ y $M(w) = 0$ para decir si/no acepta.
- **Ej:**



$w = 00101$

Entendiendo autómatas

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

Entendiendo autómatas

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

El *lenguaje aceptado por* M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) = 1\}.$$

Entendiendo autómatas

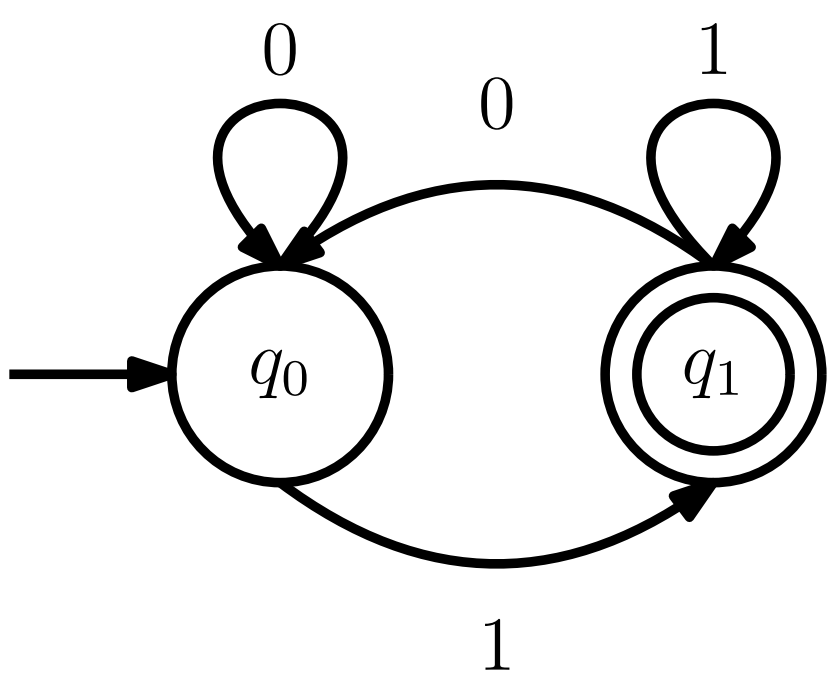
Def.

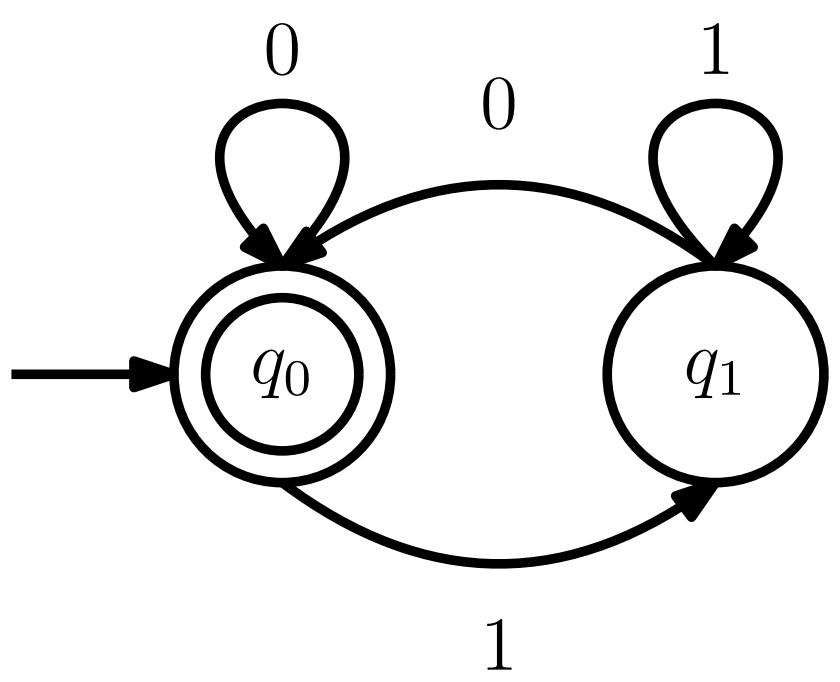
Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

El *lenguaje aceptado por* M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) = 1\}.$$

- **Ej:**





Entendiendo autómatas

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

Entendiendo autómatas

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

El *lenguaje aceptado por* M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) = 1\}.$$

Entendiendo autómatas

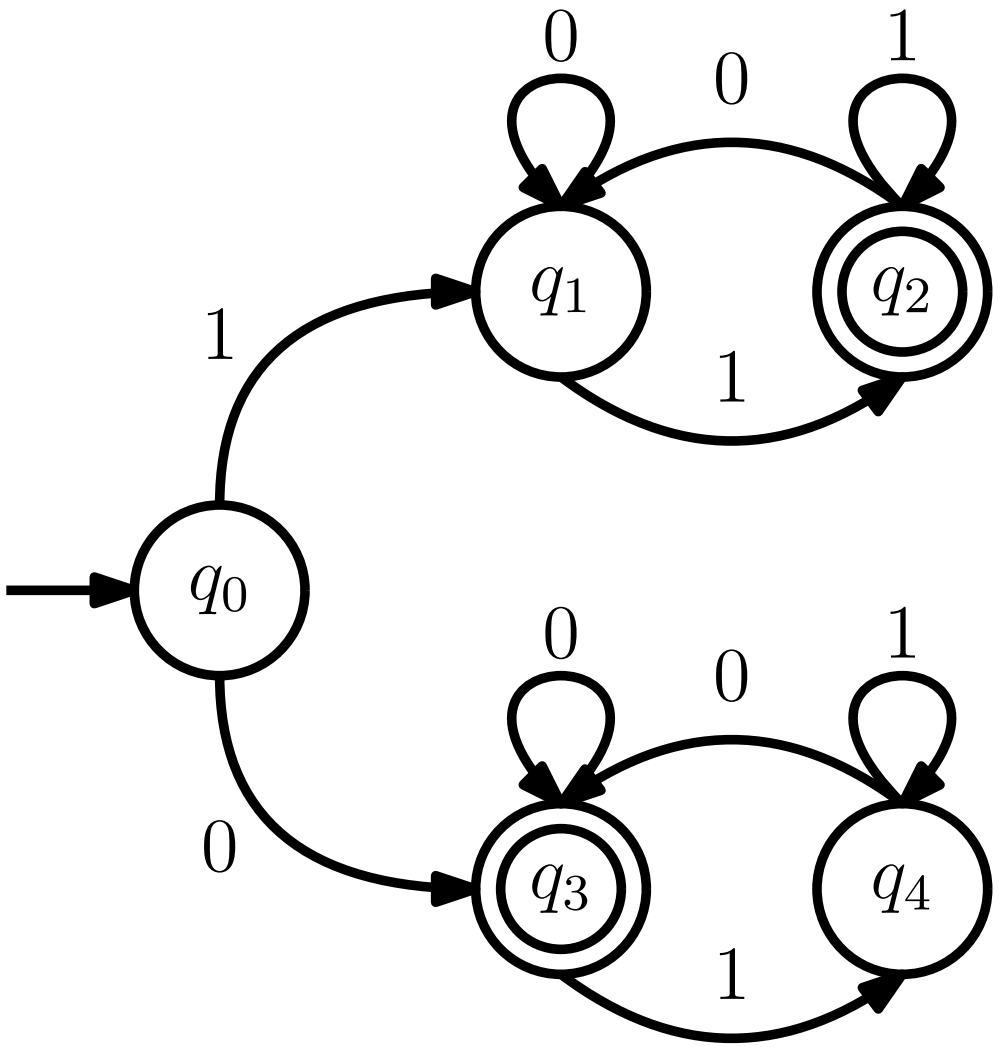
Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

El *lenguaje aceptado por* M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) = 1\}.$$

- **Ej:**



Entendiendo autómatas

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

Entendiendo autómatas

Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

El *lenguaje aceptado por* M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) = 1\}.$$

Entendiendo autómatas

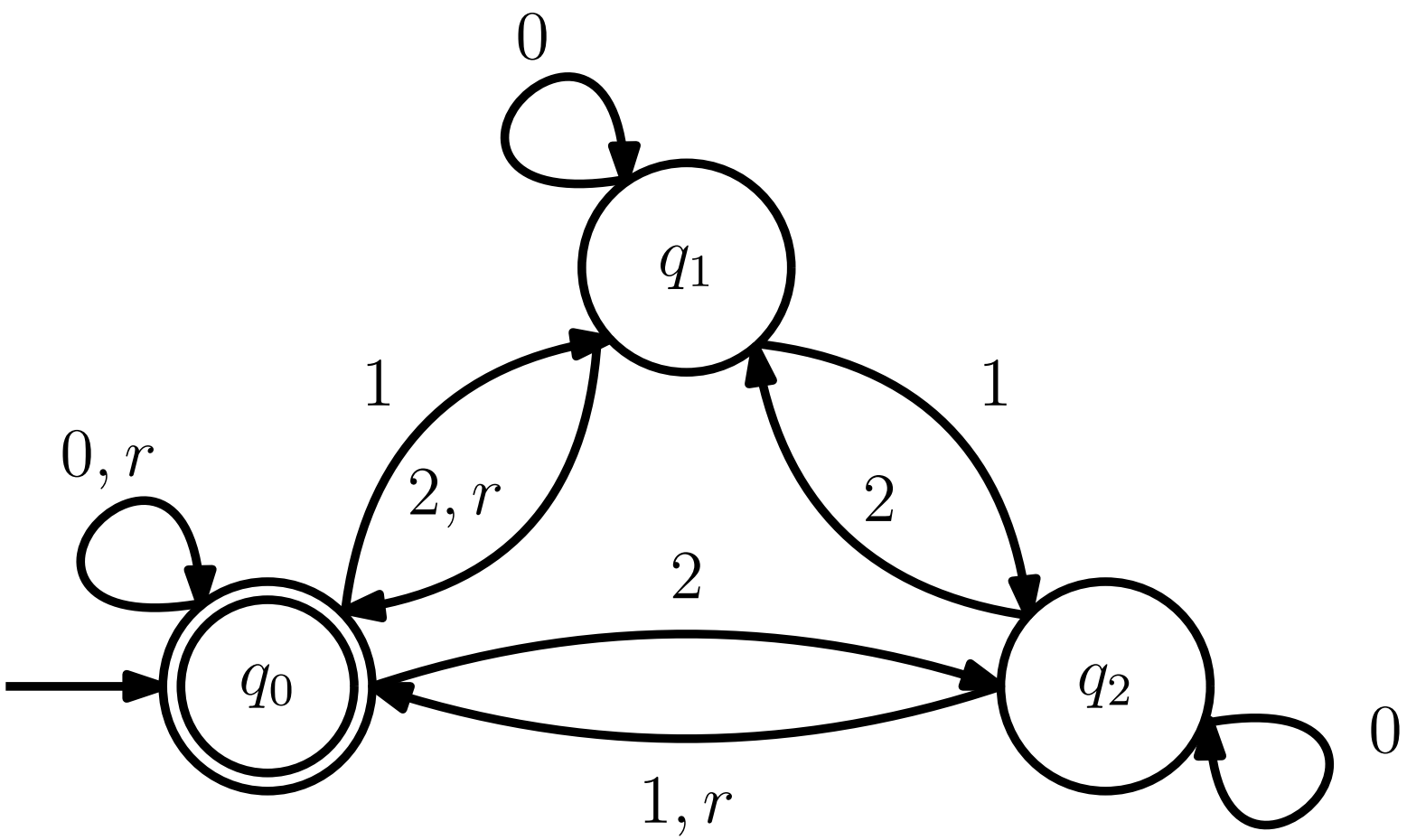
Def.

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata.

El *lenguaje aceptado por* M es

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M(w) = 1\}.$$

- **Ej:**



Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input:

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input: $w \in \Sigma^*$

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input: $w \in \Sigma^*$

Output:

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input:	$w \in \Sigma^*$
Output:	1 si $w \in L$, 0 si $w \notin L$.

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input: $w \in \Sigma^*$

Output: 1 si $w \in L$, 0 si $w \notin L$.

Def.

Sea Σ un alfabeto.

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input: $w \in \Sigma^*$

Output: 1 si $w \in L$, 0 si $w \notin L$.

Def.

Sea Σ un alfabeto.

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ es *regular* si existe un autómata M tal que $\mathcal{L}(M) = L$.

Lenguajes regulares

- Obj curso $\rightarrow$ clasificar problemas.

Input: $w \in \Sigma^*$

Output: 1 si $w \in L$, 0 si $w \notin L$.

Def.

Sea Σ un alfabeto.

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ es *regular* si existe un autómata M tal que $\mathcal{L}(M) = L$.

- Probar que L es regular $\rightarrow$ diseñar un autómata que "resuelve" L.

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo “sin memoria”?

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo “sin memoria”?
  - Puedo “guardar información” en los estados

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo “sin memoria”?
  - Puedo “guardar información” en los estados
  - Diseñar estados primero

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo “sin memoria”?
  - Puedo “guardar información” en los estados
  - Diseñar estados primero
  - Ver evolución de la función de transición

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo "sin memoria"?
  - Puedo "guardar información" en los estados
  - Diseñar estados primero
  - Ver evolución de la función de transición

- **Ej:** Demostremos que los siguientes son regulares.

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo "sin memoria"?
  - Puedo "guardar información" en los estados
  - Diseñar estados primero
  - Ver evolución de la función de transición

- **Ej:** Demostremos que los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tiene una cantidad par de 1's$\}$

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo "sin memoria"?
  - Puedo "guardar información" en los estados
  - Diseñar estados primero
  - Ver evolución de la función de transición

- **Ej:** Demostremos que los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tiene una cantidad par de 1's$\}$
  - $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ termina con $00\}$

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo "sin memoria"?
  - Puedo "guardar información" en los estados
  - Diseñar estados primero
  - Ver evolución de la función de transición

- **Ej:** Demostremos que los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tiene una cantidad par de 1's$\}$
  - $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ termina con $00\}$
  - $L_3 = \{w \in \{\texttt{b}, \texttt{e}, \texttt{r}\}^* \mid w$ tiene como antepenúltimo carácter a $\texttt{e}\}$

Diseñando autómatas

- ¿Cómo programo "sin memoria"?
  - Puedo "guardar información" en los estados
  - Diseñar estados primero
  - Ver evolución de la función de transición

- **Ej:** Demostremos que los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tiene una cantidad par de 1's$\}$
  - $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ termina con $00\}$
  - $L_3 = \{w \in \{\texttt{b},\texttt{e},\texttt{r}\}^* \mid w$ tiene como antepenúltimo carácter a $\texttt{e}\}$
  - $L_4 = \{w \in \{\texttt{b},\texttt{e},\texttt{r}\}^* \mid w$ contiene $\texttt{beer}$ como substring$\}$

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

- Lenguajes regulares son cerrados bajo complemento, unión, intersección.

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

- Lenguajes regulares son cerrados bajo complemento, unión, intersección.
- **Dem:**

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

- Lenguajes regulares son cerrados bajo complemento, unión, intersección.
- **Dem:**
- **Ej:** Los siguientes son regulares.

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

- Lenguajes regulares son cerrados bajo complemento, unión, intersección.
- **Dem:**
- **Ej:** Los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ tiene una cantidad impar de 1's$\}$

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

- Lenguajes regulares son cerrados bajo complemento, unión, intersección.
- **Dem:**
- **Ej:** Los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tiene una cantidad impar de } 1\text{'s}\}$
  - $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ termina con 00 y tiene par 1's}\}$

Operaciones de lenguajes

- ¿Qué ocurre al operar lenguajes regulares?

Teo.

Sea Σ un alfabeto y $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ dos lenguajes regulares.

Los siguientes son lenguajes regulares

- L_1^c
- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$

- Lenguajes regulares son cerrados bajo complemento, unión, intersección.
- **Dem:**
- **Ej:** Los siguientes son regulares.
  - $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tiene una cantidad impar de } 1\text{'s}\}$
  - $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ termina con 00 y tiene par 1's}\}$
  - $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ no termina con 00 o tiene impar 1's}\}$

Dudas/Preguntas

Problema del día

2. Para cada $n \geq 1$, considere el lenguaje sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ definido como

$$L_n = \{w : |w| \geq n \text{ y el } n\text{-ésimo símbolo de } w, \text{ desde la derecha, es } 1\}.$$

El objetivo de esta pregunta es determinar la cantidad óptima de estados que necesita un AFD para decidir L_n.

1. Construya un AFD con 8 estados que acepte L_3. ¿Qué información guarda su automata en los estados?
2. Construya un AFD con 2^n estados que acepte L_n. ¿Qué información guarda su automata en los estados?
3. Sea M cualquier AFD y $x, y \in \Sigma^*$. Demuestre que, si M queda en el mismo estado después de leer x y después de leer y, entonces $M(xz) = M(yz)$ para todo $z \in \Sigma^*$.
4. Suponga ahora que M reconoce L_n. Demuestre que dos strings distintos $x, y \in \{0, 1\}^n$ deben llevar a M a estados distintos. Concluya que cualquier AFD que reconozca L_n debe tener al menos 2^n estados.
5. Discuta que consecuencias tiene el inciso anterior sobre su automata del inciso *b*). ¿Qué dice esto sobre la cantidad de bits de memoria que se necesitan para aceptar L_n?

Wrap-Up

- **Hoy:**

Wrap-Up

- **Hoy:**
  - Autómatas finitos deterministas

Wrap-Up

- **Hoy:**
  - Autómatas finitos deterministas
  - Computar

Wrap-Up

- **Hoy:**
  - Autómatas finitos deterministas
  - Computar
  - Lenguajes regulares

Wrap-Up

- **Hoy:**
  - Autómatas finitos deterministas
  - Computar
  - Lenguajes regulares
  - Cerradura

Wrap-Up

- **Hoy:**
  - Autómatas finitos deterministas
  - Computar
  - Lenguajes regulares
  - Cerradura

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Hoy:**
  - Autómatas finitos deterministas
  - Computar
  - Lenguajes regulares
  - Cerradura

- **Próx. clase:**
  - Autómatas finitos **no** deterministas