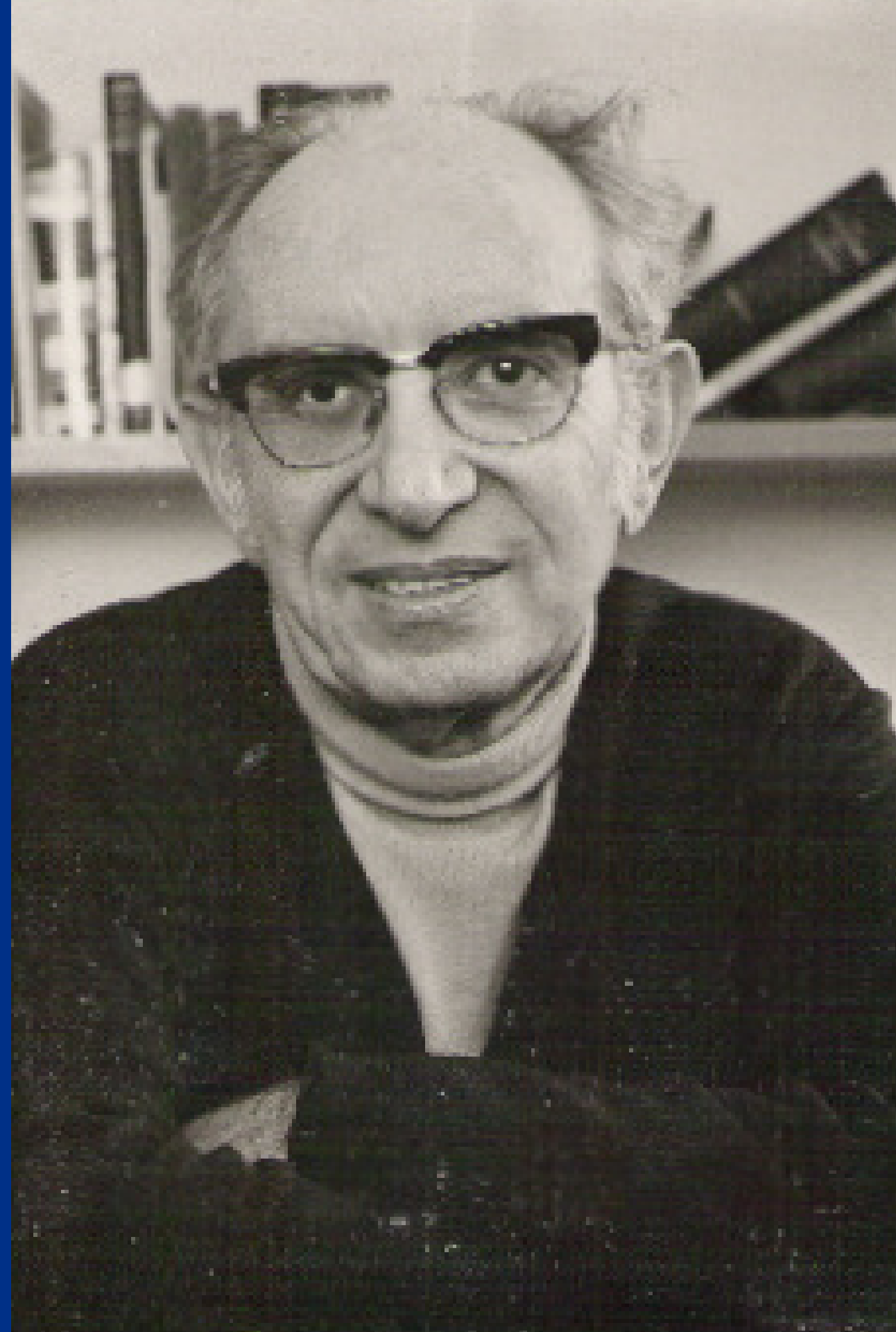


Lenguajes no libres de contexto



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo / Plan

■ Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Ambigüedad

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Ambigüedad
 - Forma normal de Chomsky

- **Recuerdo:**
 - Ambigüedad
 - Forma normal de Chomsky
 - Wrap-up lenguajes libres de contexto

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Ambigüedad
- Forma normal de Chomsky
- Wrap-up lenguajes libres de contexto

- **Plan:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Ambigüedad
- Forma normal de Chomsky
- Wrap-up lenguajes libres de contexto

- **Plan:**

- Lenguajes no libres de contexto

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Ambigüedad
- Forma normal de Chomsky
- Wrap-up lenguajes libres de contexto

- **Plan:**

- Lenguajes no libres de contexto
- El lema de bombeo para LLC

Lenguajes no libres de contexto

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.
- **Ej:** $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.
- **Ej:** $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - ¿Cómo comparar las tres cantidades con una pila?

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.
- **Ej:** $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - ¿Cómo comparar las tres cantidades con una pila?
 - **Intuición:** al comparar los a con los b , ¿qué queda para los c ?

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.
- **Ej:** $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - ¿Cómo comparar las tres cantidades con una pila?
 - **Intuición:** al comparar los a con los b , ¿qué queda para los c ?
- ¿Cúal debiese ser no libre de contexto?

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.
- **Ej:** $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - ¿Cómo comparar las tres cantidades con una pila?
 - **Intuición:** al comparar los a con los b , ¿qué queda para los c ?
- ¿Cuál debiese ser no libre de contexto?
 - $L_1 = \{w\#w^R : w \in \{0,1\}^*\}$

Lenguajes no libres de contexto

- ¿Hay lenguajes **no** libres de contexto?
- Para probar que un lenguaje es LLC $\leftarrow$ construir una GLC o un AP.
- Para probar que no es LLC $\leftarrow$ demostrar que ningún AP lo reconoce.
- AP $\leftarrow$ autómata finito con acceso a una pila.
 - Puede guardar una cantidad arbitraria de símbolos.
 - Sólo puede acceder al tope de la pila.
 - Al desapilar, recupera los símbolos en orden inverso.
- **Ej:** $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
 - ¿Cómo comparar las tres cantidades con una pila?
 - **Intuición:** al comparar los a con los b , ¿qué queda para los c ?
- ¿Cuál debiese ser no libre de contexto?
 - $L_1 = \{w\#w^R : w \in \{0,1\}^*\}$
 - $L_2 = \{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$

Lema de bombeo

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Dem:**

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Dem:**
 - **Simplificación:** Forma normal de Chomsky.

Lema de bombeo

- String largo $\rightarrow$ árbol de derivación alto $\rightarrow$ alguna variable se repite.

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Dem:**
 - **Simplificación:** Forma normal de Chomsky.

- ¿Cómo aplicarlo?

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.
- Supongo que L es LLC y aplico el lema de bombeo.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.
- Supongo que L es LLC y aplico el lema de bombeo.
- Orden: $\exists p \geq 1 \forall w \in L, |w| \geq p \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* \forall i \in \mathbb{N}$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.
- Supongo que L es LLC y aplico el lema de bombeo.
- Orden: $\exists p \geq 1 \forall w \in L, |w| \geq p \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* \forall i \in \mathbb{N}$.
 - **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.
- Supongo que L es LLC y aplico el lema de bombeo.
- Orden: $\exists p \geq 1 \forall w \in L, |w| \geq p \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* \forall i \in \mathbb{N}$.
 - **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
 - **Yo:** elijo un string $w \in L$ con $|w| \geq p$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.
- Supongo que L es LLC y aplico el lema de bombeo.
- Orden: $\exists p \geq 1 \forall w \in L, |w| \geq p \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* \forall i \in \mathbb{N}$.
 - **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
 - **Yo:** elijo un string $w \in L$ con $|w| \geq p$.
 - **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- La demostración típica es por contradicción.
- Supongo que L es LLC y aplico el lema de bombeo.
- Orden: $\exists p \geq 1 \forall w \in L, |w| \geq p \exists u, v, x, y, z \in \Sigma^* \forall i \in \mathbb{N}$.
 - **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
 - **Yo:** elijo un string $w \in L$ con $|w| \geq p$.
 - **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.
 - **Yo:** elijo un entero $i \geq 0$ tal que $uv^i xy^i z \notin L$: contradicción.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
 - $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
 - $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.
-
- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .
- **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .
- **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.
- **Yo:** elijo un entero $i \geq 0$ tal que $uv^i xy^i z \notin L$: contradicción.

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .
- **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.
- **Yo:** elijo un entero $i \geq 0$ tal que $uv^i xy^i z \notin L$: contradicción.

• Ej:

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .
- **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.
- **Yo:** elijo un entero $i \geq 0$ tal que $uv^i xy^i z \notin L$: contradicción.

• Ej:

- $L_1 = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .
- **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.
- **Yo:** elijo un entero $i \geq 0$ tal que $uv^i xy^i z \notin L$: contradicción.

• Ej:

- $L_1 = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{w \# w : w \in \{0, 1\}^*\}$

Aplicando el lema de bombeo

Lem.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje libre de contexto.

Existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ (*largo de bombeo*), tal que cada $w \in L$, $|w| \geq p$, se escribe $w = uvxyz$, con $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ y

- $|vxy| \leq p$,
- $|vy| > 0$ (al menos uno de v, y es no vacío),
- $uv^i xy^i z \in L$ para todo entero $i \geq 0$.

- **Adversario:** elige un entero $p \geq 1$.
- **Yo:** elijo $w \in L$ con $|w| \geq p$; puede depender de p .
- **Adversario:** elige $w = uvxyz$ con $|vxy| \leq p$ y $|vy| > 0$.
- **Yo:** elijo un entero $i \geq 0$ tal que $uv^i xy^i z \notin L$: contradicción.

• Ej:

- $L_1 = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$
- $L_2 = \{w \# w : w \in \{0, 1\}^*\}$
- $L_3 = \{a^i b^j c^k : i, j, k \in \mathbb{N}, i \leq j \leq k\}$

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC ($\circ \cup \circ *$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Lem.

Si L es libre de contexto y R es regular. Entonces, $L \cap R$ es libre de contexto.

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Lem.

Si L es libre de contexto y R es regular. Entonces, $L \cap R$ es libre de contexto.

- Misma estrategia que para las otras cerraduras.

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC ($\circ \cup \circ *$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Lem.

Si L es libre de contexto y R es regular. Entonces, $L \cap R$ es libre de contexto.

- Misma estrategia que para las otras cerraduras.
- **Ej:** $|w|_a$ denota la cantidad de a en w .

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Lem.

Si L es libre de contexto y R es regular. Entonces, $L \cap R$ es libre de contexto.

- Misma estrategia que para las otras cerraduras.
- **Ej:** $|w|_a$ denota la cantidad de a en w .
 - $L_1 = \{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Lem.

Si L es libre de contexto y R es regular. Entonces, $L \cap R$ es libre de contexto.

- Misma estrategia que para las otras cerraduras.
- **Ej:** $|w|_a$ denota la cantidad de a en w .
 - $L_1 = \{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$
 - $L_2 = \{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j\}$

Propiedades de cerradura

- **Otra técnica:** cerradura de LLC bajo operaciones regulares.
 - Por contradicción: supongo L LLC y elijo X LLC.
 - Entonces $L' = LX$ es LLC (o $\cup$ o $*$)
 - Pero ya sabemos que L' no es LLC: contradicción.
- ¡Ojo! Los LLC no son cerrados bajo intersección ni complemento.
 - $\{a^k b^n c^n \mid k, n \in \mathbb{N}\} \cap \{a^n b^n c^k \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

Lem.

Si L es libre de contexto y R es regular. Entonces, $L \cap R$ es libre de contexto.

- Misma estrategia que para las otras cerraduras.
- **Ej:** $|w|_a$ denota la cantidad de a en w .
 - $L_1 = \{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$
 - $L_2 = \{a^i b^j c^j : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq j\}$
 - $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* : |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

¿Caracterización de los LLC?

- ¿Basta el bombeo para caracterizar a los LLC?

¿Caracterización de los LLC?

- ¿Basta el bombeo para caracterizar a los LLC?
- **Ej:** $L = \{a^i b^j c^k d^\ell : i, j, k, \ell \in \mathbb{N}, i = 0 \text{ o } j = k = \ell\}$

¿Caracterización de los LLC?

- ¿Basta el bombeo para caracterizar a los LLC?
- **Ej:** $L = \{a^i b^j c^k d^\ell : i, j, k, \ell \in \mathbb{N}, i = 0 \text{ o } j = k = \ell\}$
 - ¿Satisface la condición de bombeo?

¿Caracterización de los LLC?

- ¿Basta el bombeo para caracterizar a los LLC?
- **Ej:** $L = \{a^i b^j c^k d^\ell : i, j, k, \ell \in \mathbb{N}, i = 0 \text{ o } j = k = \ell\}$
 - ¿Satisface la condición de bombeo?
 - ¿Es libre de contexto?

¿Caracterización de los LLC?

- ¿Basta el bombeo para caracterizar a los LLC?
- **Ej:** $L = \{a^i b^j c^k d^\ell : i, j, k, \ell \in \mathbb{N}, i = 0 \text{ o } j = k = \ell\}$
 - ¿Satisface la condición de bombeo?
 - ¿Es libre de contexto?
- Satisfacer la condición de bombeo es necesario para ser LLC,

¿Caracterización de los LLC?

- ¿Basta el bombeo para caracterizar a los LLC?
- **Ej:** $L = \{a^i b^j c^k d^\ell : i, j, k, \ell \in \mathbb{N}, i = 0 \text{ o } j = k = \ell\}$
 - ¿Satisface la condición de bombeo?
 - ¿Es libre de contexto?
- Satisfacer la condición de bombeo es necesario para ser LLC,
 - pero no es suficiente.

Más ejemplos del lema de bombeo

- Ej:

Más ejemplos del lema de bombeo

- Ej:

- $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ es palíndromo y } |w|_0 = |w|_1\}$

Más ejemplos del lema de bombeo

- Ej:

- $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ es palíndromo y } |w|_0 = |w|_1\}$

- $L_2 = \{0^n \# 0^{2n} \# 0^{3n} : n \in \mathbb{N}\}$

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Lenguajes no libres de contexto

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Lenguajes no libres de contexto
 - El lema de bombeo para LLC

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Lenguajes no libres de contexto
- El lema de bombeo para LLC

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Lenguajes no libres de contexto
- El lema de bombeo para LLC

- **Próx. clase:**

- Máquinas de Turing