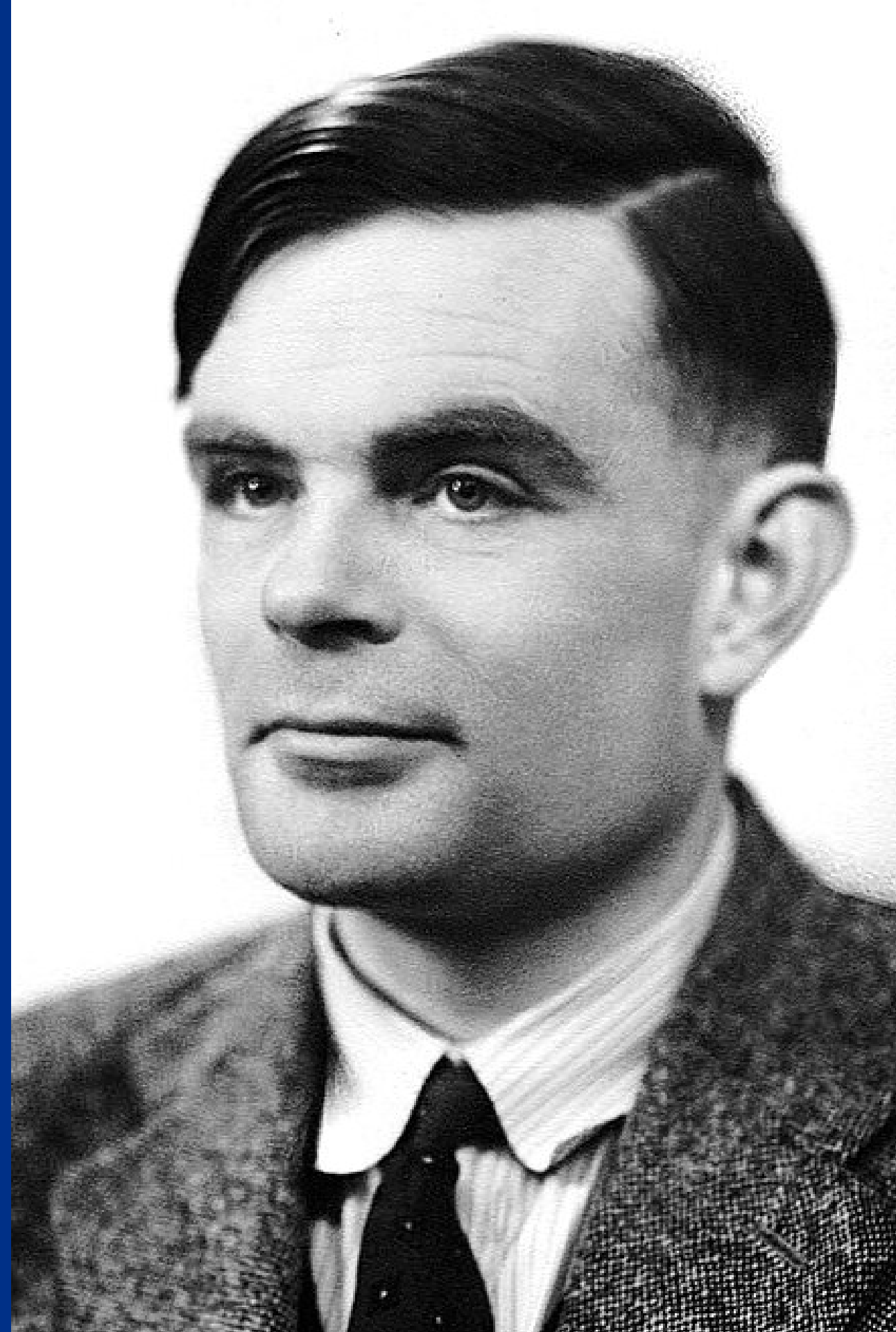


Variantes de máquinas de Turing



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Arturo Merino



Recuerdo / Plan

■ Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Máquinas de Turing

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Máquinas de Turing
 - Reconocer y decidir

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**
 - Máquinas de Turing
 - Reconocer y decidir
 - Configuraciones y computaciones

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Máquinas de Turing
- Reconocer y decidir
- Configuraciones y computaciones

- **Plan:**

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Máquinas de Turing
- Reconocer y decidir
- Configuraciones y computaciones

- **Plan:**

- Variantes de máquinas de Turing

Recuerdo/Plan

- **Recuerdo:**

- Máquinas de Turing
- Reconocer y decidir
- Configuraciones y computaciones

- **Plan:**

- Variantes de máquinas de Turing
- Acceso a memoria

Variantes de máquinas de Turing

Equivalencia de modelos

- Decisiones **arbitrarias** en el modelo de la MT.

Equivalencia de modelos

- Decisiones **arbitrarias** en el modelo de la MT.
 - ¿Cuáles?

Equivalencia de modelos

- Decisiones **arbitrarias** en el modelo de la MT.
 - ¿Cuáles?

Def.

Sean M y N dos máquinas con alfabeto de entrada Σ .

Equivalencia de modelos

- Decisiones **arbitrarias** en el modelo de la MT.
 - ¿Cuáles?

Def.

Sean M y N dos máquinas con alfabeto de entrada Σ .

Diremos que M y N son *equivalentes* si $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$.

Equivalencia de modelos

- Decisiones **arbitrarias** en el modelo de la MT.
 - ¿Cuáles?

Def.

Sean M y N dos máquinas con alfabeto de entrada Σ .

Diremos que M y N son *equivalentes* si $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$.

- Nos convenceremos de que el modelo es **robusto**.

Equivalencia de modelos

- Decisiones **arbitrarias** en el modelo de la MT.
 - ¿Cuáles?

Def.

Sean M y N dos máquinas con alfabeto de entrada Σ .

Diremos que M y N son *equivalentes* si $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$.

- Nos convenceremos de que el modelo es **robusto**.

Def.

Diremos que dos modelos de computación son *equivalentes* si para cada máquina de uno existe una máquina equivalente en el otro y viceversa.

Movimiento estacionario

Def.

Una *MT con movimiento estacionario* es una MT cuya función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

Movimiento estacionario

Def.

Una *MT con movimiento estacionario* es una MT cuya función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

El movimiento *S* deja el cabezal en la misma celda.

Movimiento estacionario

Def.

Una *MT con movimiento estacionario* es una MT cuya función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

El movimiento S deja el cabezal en la misma celda.

- La cinta, el inicio y la computación se definen como antes.

Movimiento estacionario

Def.

Una *MT con movimiento estacionario* es una MT cuya función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

El movimiento S deja el cabezal en la misma celda.

- La cinta, el inicio y la computación se definen como antes.

Lem.

Las MT y las MT con movimiento estacionario son equivalentes.

Movimiento estacionario

Def.

Una *MT con movimiento estacionario* es una MT cuya función de transición tiene la forma

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}.$$

El movimiento S deja el cabezal en la misma celda.

- La cinta, el inicio y la computación se definen como antes.

Lem.

Las MT y las MT con movimiento estacionario son equivalentes.

- **Dem:**

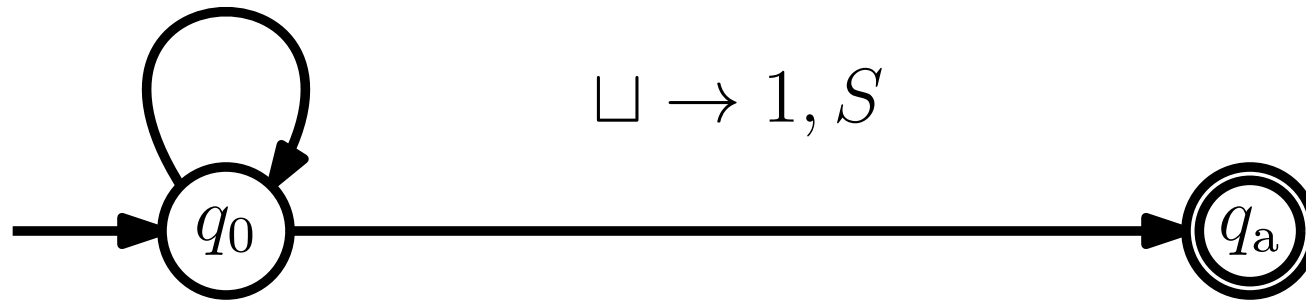
Movimiento estacionario: diseñar

- **Ej:** diseñar una MT que calcule $f(w) = w1$, para $w \in \{0, 1\}^*$.

Movimiento estacionario: diseñar

- **Ej:** diseñar una MT que calcule $f(w) = w1$, para $w \in \{0, 1\}^*$.
- **Sol.**

$0, 1 \rightarrow R$



Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.
 - Se parte en q_0 , con cada cabezal en la primera celda.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.
 - Se parte en q_0 , con cada cabezal en la primera celda.
- La computación es análoga: se actúa sobre las k cintas a la vez.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.
 - Se parte en q_0 , con cada cabezal en la primera celda.
- La computación es análoga: se actúa sobre las k cintas a la vez.
 - Mismas reglas de borde izquierdo, aceptación y rechazo.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.
 - Se parte en q_0 , con cada cabezal en la primera celda.
- La computación es análoga: se actúa sobre las k cintas a la vez.
 - Mismas reglas de borde izquierdo, aceptación y rechazo.

Teo.

Para todo $k \geq 1$, las MT de k cintas y las MT son equivalentes.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.
 - Se parte en q_0 , con cada cabezal en la primera celda.
- La computación es análoga: se actúa sobre las k cintas a la vez.
 - Mismas reglas de borde izquierdo, aceptación y rechazo.

Teo.

Para todo $k \geq 1$, las MT de k cintas y las MT son equivalentes.

- **Obs:** esto vale tanto para reconocer como para decidir.

Máquinas multicinta

Def.

Sea $k \geq 1$ un entero.

Una *MT de k cintas* es una MT con k cintas semiinfinitas, un cabezal por cinta y función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k.$$

- Al inicio: entrada en la primera cinta; el resto de las celdas en blanco.
 - Se parte en q_0 , con cada cabezal en la primera celda.
- La computación es análoga: se actúa sobre las k cintas a la vez.
 - Mismas reglas de borde izquierdo, aceptación y rechazo.

Teo.

Para todo $k \geq 1$, las MT de k cintas y las MT son equivalentes.

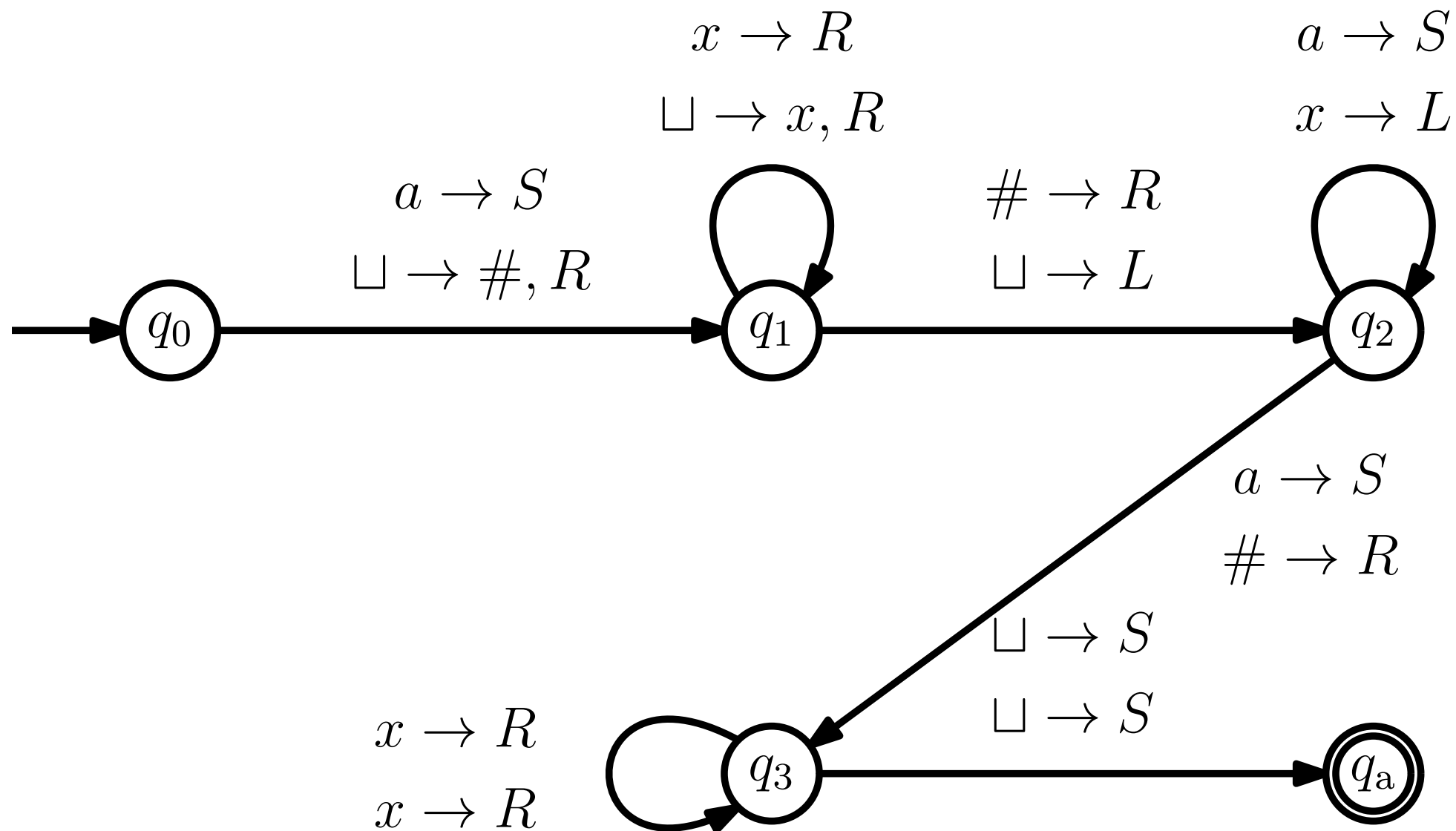
- **Obs:** esto vale tanto para reconocer como para decidir.
- ¿Cómo computa funciones?

Dos cintas: diseñar

- **Ej:** decidir $L = \{w\#w : w \in \{0, 1\}^*\}$ con dos cintas.

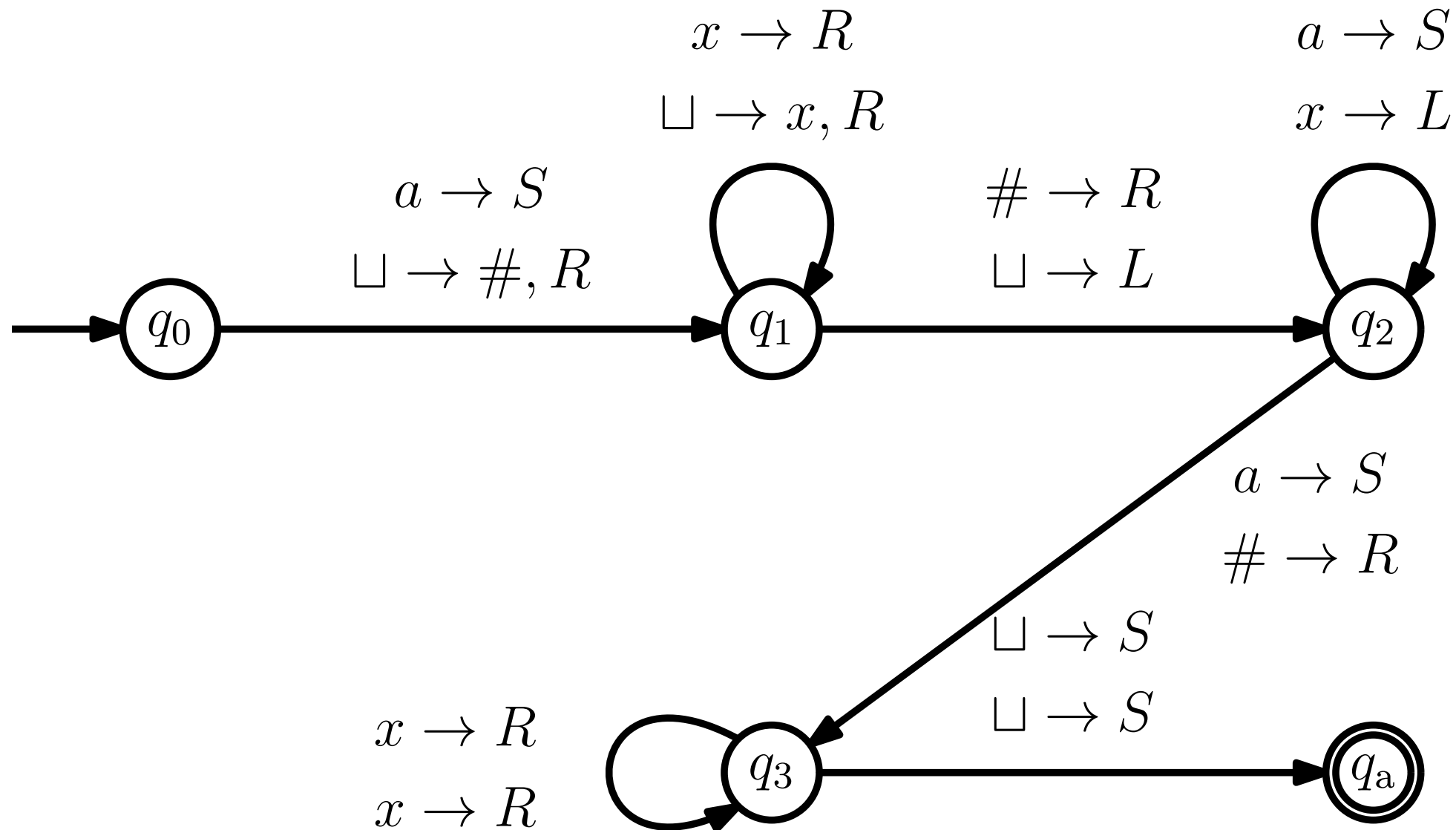
Dos cintas: diseñar

- **Ej:** decidir $L = \{w\#w : w \in \{0, 1\}^*\}$ con dos cintas.
- **Sol.**



Dos cintas: diseñar

- **Ej:** decidir $L = \{w\#w : w \in \{0, 1\}^*\}$ con dos cintas.
- **Sol.**



- $a \in \{0, 1, \#, \sqcup\}$, $x \in \{0, 1\}$; lo no dibujado rechaza.

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

- Sea $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ la entrada.

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

- Sea $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ la entrada.
 - Al inicio, la celda i contiene w_{i+1} para $0 \leq i < n$.

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

- Sea $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ la entrada.
 - Al inicio, la celda i contiene w_{i+1} para $0 \leq i < n$.
 - Las demás contienen $\sqcup$; el cabezal parte en 0, en estado q_0 .

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

- Sea $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ la entrada.
 - Al inicio, la celda i contiene w_{i+1} para $0 \leq i < n$.
 - Las demás contienen $\sqcup$; el cabezal parte en 0, en estado q_0 .

Teo.

Las MT y las MT de cinta biinfinita son equivalentes.

Cinta biinfinita

Def.

Una *MT de cinta biinfinita* es una MT cuyas celdas se indexan por $\mathbb{Z}$, sin extremo izquierdo.

Los movimientos L y R cambian el índice en -1 y $+1$.

- Sea $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ la entrada.
 - Al inicio, la celda i contiene w_{i+1} para $0 \leq i < n$.
 - Las demás contienen $\sqcup$; el cabezal parte en 0, en estado q_0 .

Teo.

Las MT y las MT de cinta biinfinita son equivalentes.

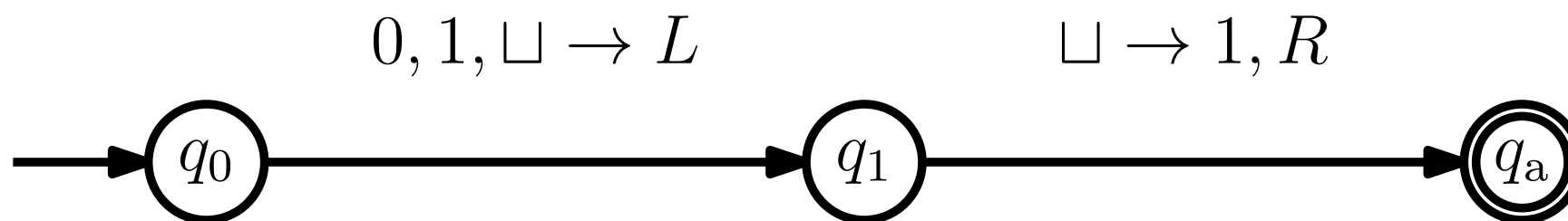
- ¿Cómo computa funciones?

Cinta biinfinita: diseñar

- **Ej:** diseñar una MT que anteponga un 1 a $w \in \{0, 1\}^*$.

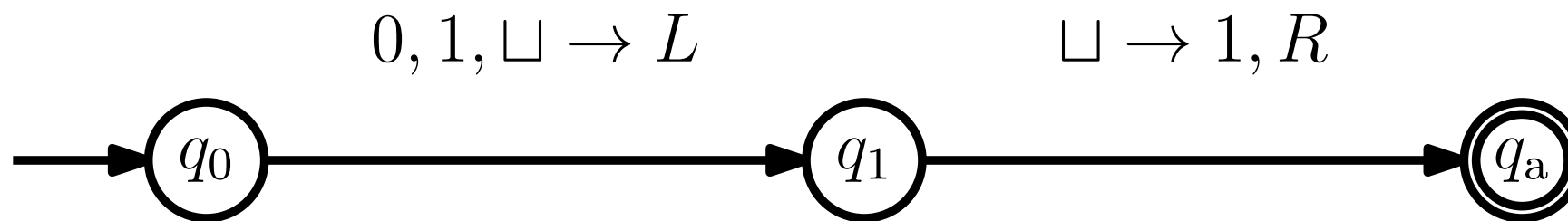
Cinta biinfinita: diseñar

- **Ej:** diseñar una MT que anteponga un 1 a $w \in \{0, 1\}^*$.
- **Sol.**



Cinta biinfinita: diseñar

- **Ej:** diseñar una MT que anteponga un 1 a $w \in \{0, 1\}^*$.
- **Sol.**



- Las transiciones no dibujadas rechazan.

Otros modelos:

- Cinta en $\mathbb{Z}^2$.

Otros modelos:

- Cinta en $\mathbb{Z}^2$.
- Cinta en $\mathbb{Z}^k$.

Otros modelos:

- Cinta en $\mathbb{Z}^2$.
- Cinta en $\mathbb{Z}^k$.
- Máquina que sólo puede mover cabezal a la derecha o resetear cabezal.

Otros modelos:

- Cinta en $\mathbb{Z}^2$.
- Cinta en $\mathbb{Z}^k$.
- Máquina que sólo puede mover cabezal a la derecha o resetear cabezal.
- Modelo I/O

Accesso a memoria

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada y el control pasa a un estado fijo de Q .

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada y el control pasa a un estado fijo de Q .

- Dirección: prefijo binario hasta el primer $\sqcup$; vacío significa 0.

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada y el control pasa a un estado fijo de Q .

- Dirección: prefijo binario hasta el primer $\sqcup$; vacío significa 0.
- Al inicio: entrada en datos; dirección en blanco; estado q_0 .

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada y el control pasa a un estado fijo de Q .

- Dirección: prefijo binario hasta el primer $\sqcup$; vacío significa 0.
- Al inicio: entrada en datos; dirección en blanco; estado q_0 .
 - Celdas desde 0; ambos cabezales parten en 0.

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada y el control pasa a un estado fijo de Q .

- Dirección: prefijo binario hasta el primer $\sqcup$; vacío significa 0.
- Al inicio: entrada en datos; dirección en blanco; estado q_0 .
 - Celdas desde 0; ambos cabezales parten en 0.
- El salto no cambia las cintas ni el cabezal de direcciones.

MT con acceso RAM

Def.

Una *MT con acceso RAM* es una MT de dos cintas: datos y direcciones. La segunda sólo usa 0, 1, $\sqcup$.

Además de las transiciones usuales, hay *transiciones de salto*: el cabezal de datos va a la dirección indicada y el control pasa a un estado fijo de Q .

- Dirección: prefijo binario hasta el primer $\sqcup$; vacío significa 0.
- Al inicio: entrada en datos; dirección en blanco; estado q_0 .
 - Celdas desde 0; ambos cabezales parten en 0.
- El salto no cambia las cintas ni el cabezal de direcciones.

Teo.

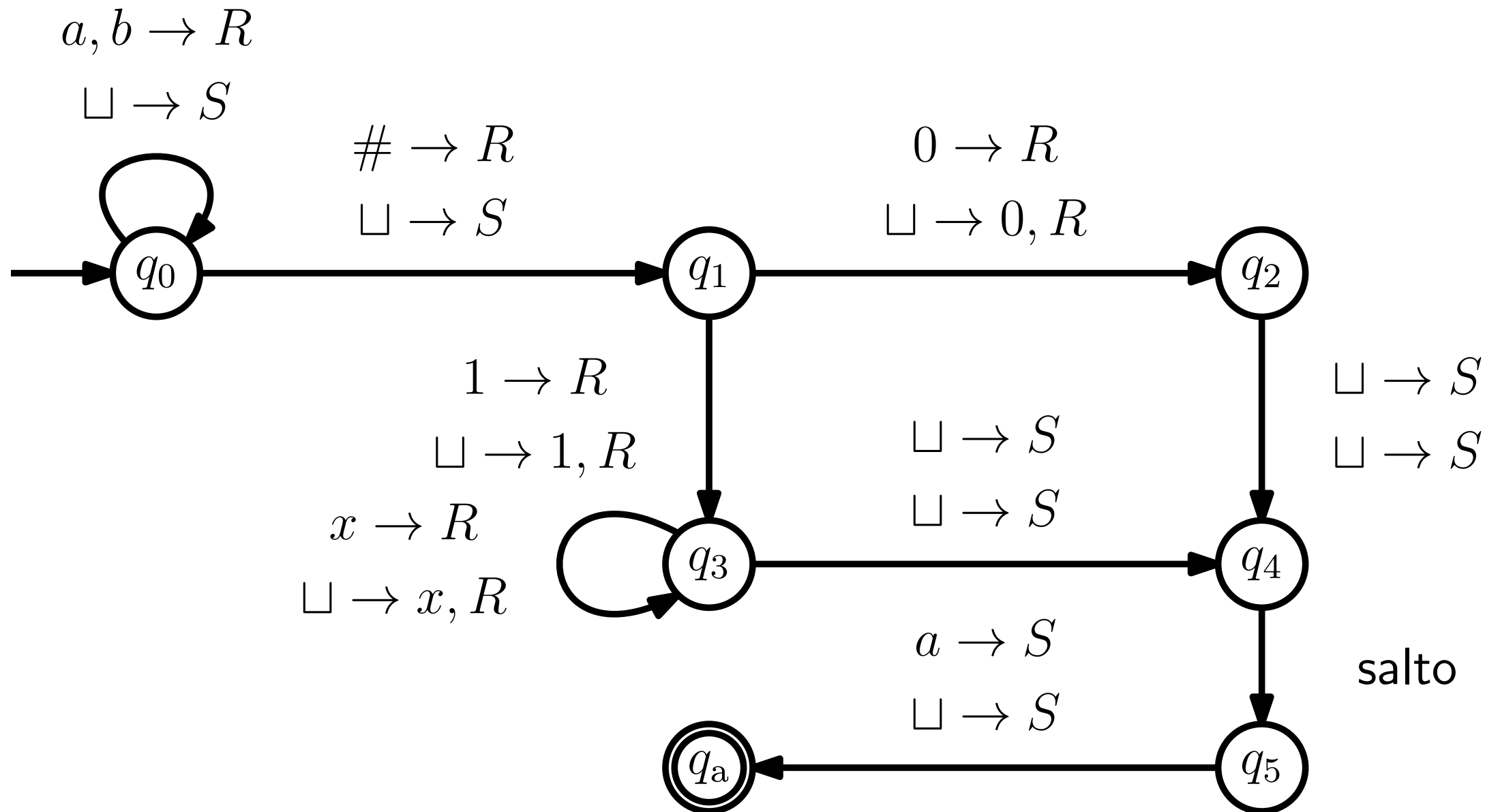
Las MT con acceso RAM y las MT son equivalentes, tanto para reconocer como para decidir.

Acceso RAM: diseñar

- **Ej:** decidir $L = \{u\# \text{bin}(j) : u \in \{a, b\}^*, 0 \leq j < |u|, u_j = a\}$.

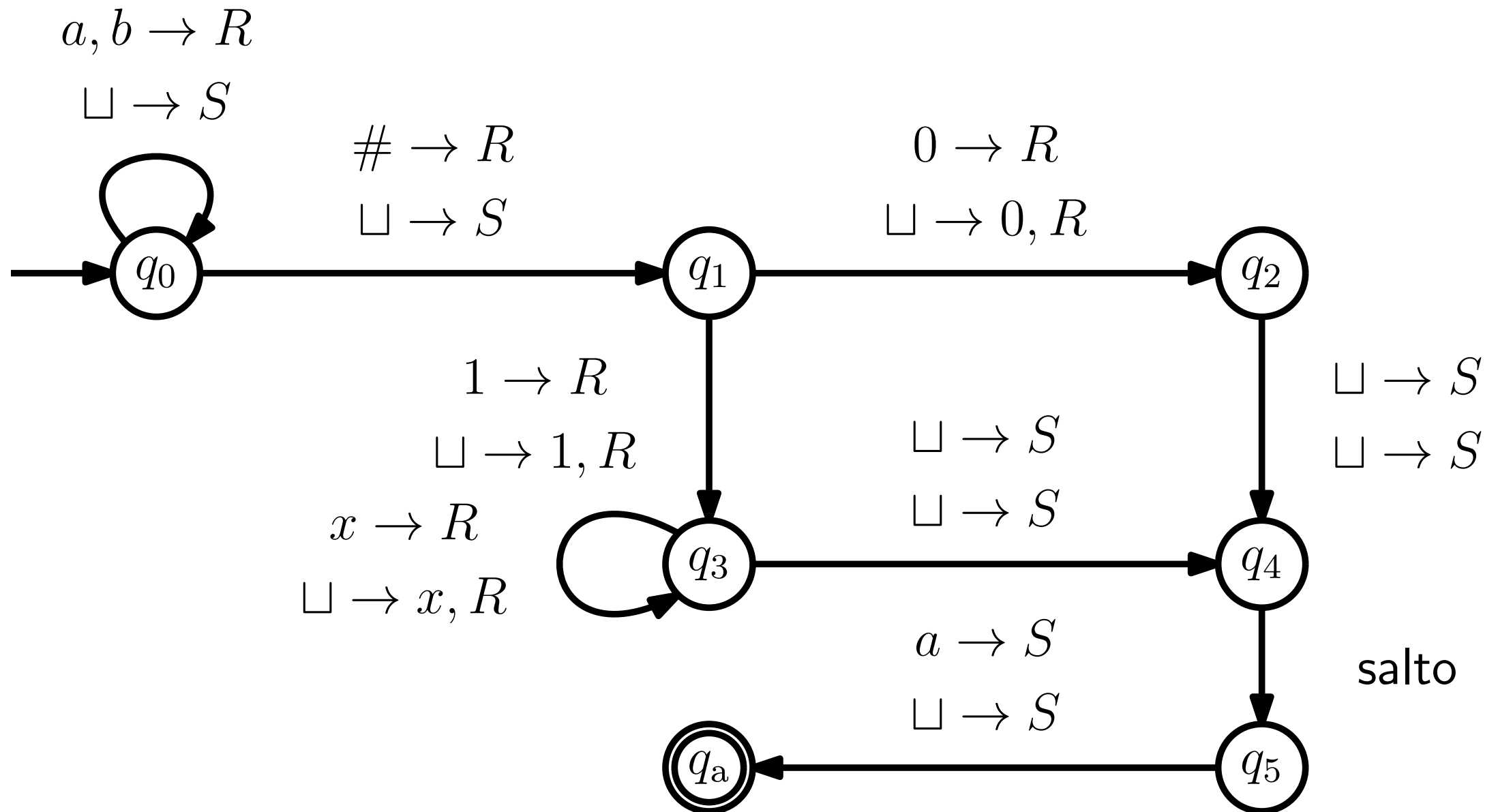
Acceso RAM: diseñar

- **Ej:** decidir $L = \{u\# \text{bin}(j) : u \in \{a, b\}^*, 0 \leq j < |u|, u_j = a\}$.
- **Sol.**



Acceso RAM: diseñar

- **Ej:** decidir $L = \{u\# \text{bin}(j) : u \in \{a, b\}^*, 0 \leq j < |u|, u_j = a\}$.
- **Sol.**



- Datos arriba; direcciones abajo. $x \in \{0, 1\}$. Lo no dibujado rechaza.

Autómatas con cola

Def.

Un *autómata determinista con cola* es como un AP, pero con una cola en lugar de una pila.

Autómatas con cola

Def.

Un *autómata determinista con cola* es como un AP, pero con una cola en lugar de una pila.

Teo.

Los autómatas deterministas con cola y las MT son equivalentes, tanto para reconocer como para decidir.

Autómatas con cola

Def.

Un *autómata determinista con cola* es como un AP, pero con una cola en lugar de una pila.

Teo.

Los autómatas deterministas con cola y las MT son equivalentes, tanto para reconocer como para decidir.

- **Ej:** duplicar cada símbolo de $w \in \{0, 1\}^*$ usando una cola.

Otros modelos:

- Multipointer RAM

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model
- Máquina con diccionario

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model
- Máquina con diccionario
- Máquina con array

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model
- Máquina con diccionario
- Máquina con array
- Máquina con linked list

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model
- Máquina con diccionario
- Máquina con array
- Máquina con linked list
- Máquina 4 contadora.

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model
- Máquina con diccionario
- Máquina con array
- Máquina con linked list
- Máquina 4 contadora.
- Máquina 2 contadora

Otros modelos:

- Multipointer RAM
- Word RAM model
- Máquina con diccionario
- Máquina con array
- Máquina con linked list
- Máquina 4 contadora.
- Máquina 2 contadora
- Máquina con 2 stacks

Dudas/Preguntas

Wrap-Up

- **Hoy:**

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Variantes de máquinas de Turing

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Variantes de máquinas de Turing
 - Simular un modelo con otro

Wrap-Up

- **Hoy:**
 - Variantes de máquinas de Turing
 - Simular un modelo con otro
 - Acceso a memoria

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Variantes de máquinas de Turing
- Simular un modelo con otro
- Acceso a memoria

- **Próx. clase:**

Wrap-Up

- **Hoy:**

- Variantes de máquinas de Turing
- Simular un modelo con otro
- Acceso a memoria

- **Próx. clase:**

- Máquinas de Turing no deterministas